

„Rareori s-a întâmplat ca într-o lucrare adresată nespecialiștilor grija de a fi la zi cu ideile și rezultatele prezentate să se manifeste atât de pregnant ca în cartea de față... În mod deosebit trebuie să accentuăm valoarea unor capitole în care autorul prezintă propriile sale rezultate sau rezultate obținute în colaborare: teorema de imposibilitate a agregării indicatorilor, gramatica proceselor economice, gramatica creierului. Aici, cu deosebire, se simte autenticitatea lucrurilor trăite.

Un element original al cărții – și care ține și el de personalitatea autorului – este frumoasa obsesie a literaturii SF, care, dacă nu exista, trebuia probabil inventată cu scopul de a face știința mai agreabilă.”

SOLOMON MARCUS



GHEORGHE PĂUN

Din spectacolul matematicii



EDITURA ALBATROS



*În memoria lui Grigore C. MOISIL,
românul-filozof care suridea făcînd matematică.*

„Pentru noi, o carte de matematică modernă va conține întotdeauna și surîsul lui Moisi. Acel surîs de neuitat, a cărui absență e ca o cicatrice a inteligenței. Una din acele cicatrici de pe chipul încercat al inteligenței care ne aduc aminte că există oameni pe care iubindu-i, ne scutim de tristețea de a orbecăi la întîmplare. Dragostea pentru ei ne luminează drumul.“

OCTAVIAN PALER

România literară, 15 ianuarie 1981

I. CUVÎNT ÎNAINTE

A serie o carte de popularizare a matematicii este o aventură dificilă și riscantă.

Într-adevăr, printr-o lucrare de popularizare se înțelege în general o prezentare a unor fapte științifice în așa fel încît articularea, semnificația și consecințele lor să fie pe înțelesul a ceea ce se numește, puțin peiorativ, „omul de pe stradă”, cetățeanul de vîrstă medie, cu preocupări științifice medii, de răbdare medie, dar cu educație sub-medie în știința respectivă.

Matematica suportă însă cu greu asemenea prezentări. În primul rînd (și poate chiar și în ultimul), o asemenea prezentare de popularizare trebuie făcută în vorbe, fără utilizarea inhibantelor simboluri și formule, fără figuri tehnice și cuvinte de jargon. Un geograf poate să-și descrie observațiile în cuvinte, un biolog de asemenea, un fizician poate prezenta (unele dintre) rezultatele sale în cuvinte. Semnificațiile rezultatelor tuturor acestor discipline științifice și a multora altele pot fi formulate în limba română, aceste științe însele operează în mare măsură cu limba română uzuală, limbajul lor este un fragment specializat al unei limbi naturale.

Cu matematica lucrurile stau altfel; ea este o limbă nouă, care utilizează o limbă naturală numai în scopuri exterioare, articularea ei esențială bazîndu-se pe manipularea unui formalism propriu, în mare măsură suficient sie însuși.

În plus, impactul majorității științelor asupra corpului curent de cunoștințe, asupra filozofiei zilnice sau a celei sistematice, este direct, este sesizabil nemijlocit și la scurt

timp (dacă nu imediat) după obținerea rezultatului științific. Implicațiile morale și sociale ale clonajului sînt vizibile pentru oricine, chiar dacă nu știm ce este acela clonaj și cum se face el, faptul că pe această cale se pot produce indivizi (deocamdată numai broaște și șoareci, dar pasul pînă la om este totuși foarte mic) identici genetic este percutant pentru orice conștiință. Succesele astronauticii și astronomiei trec imediat din laboratoare, centre de coordonare și observatoare în ziare și reviste. Exemplele pot continua. Se întîmplă însă mult mai rar ca un ziar, fie el chiar și cu preocupări de popularizare a științei, să anunțe o teoremă matematică, să discute un rezultat de algebră liniară, de exemplu. Pentru că este greu, foarte greu, dacă nu chiar imposibil adesea, de prezentat cu mijloace jurnalistice un rezultat matematic. De regulă, semnificațiile acestor rezultate sînt vizibile doar printr-un lanț de intermediari care nu sînt de natură matematică.

În aceste condiții, ce șanse are o lucrare de popularizare a matematicii? Prima capcană este ca ea să ajungă un caleidoscop de probleme mai mult sau mai puțin celebre, ori mai mult sau mai puțin amuzante, de anecdote cu matematicieni, cîteva priviri istorice, o colecție de erori, de microbiografii, de trucuri cu numere sau cu figuri etc. etc. Se obține o carte de cele mai multe ori cu adevărat populară, dar care nu se referă prea mult la matematică, sau în orice caz nu are legătură cu popularizarea matematicii. „Amuzamentele matematice” ale lui Martin Gardner sînt și amuzante și matematice dar, cu mici excepții, problemele prezentate în carte sînt de ceea ce îmi place să numesc „logică duminicală”. Este adevărat că pe marginea tetra- și hexa-flexagoanelor se poate face matematică, jocurile *go*, *hex* sau *tiktaktoe* pot fi tratate matematic, există modele topologice „curioase”, dar, și Martin Gardner o subliniază insistent în introducere, scopul cărții sale este prezentarea unor probleme recreative, a unor jocuri matematice. Ea nu vrea să popularizeze rezultate, să facă eventual introduceri plăcute în diverse capitole ale matematicii, ci numai să distreze, elegant și instructiv, pe cititor.

La cealaltă extremă ar putea sta *Ce este matematica?* de Robert Courant și Herbert Robbins, care chiar spun că lucrarea lor „poate fi privită ca o carte de popularizare”. Da, dar tot ei spun în aceeași frază: „în măsura în care ea presupune doar cunoașterea matematicii de liceu”. Ei, nu, vorba lui Jupîn Dumitrache, „poporul sîntem noi, eu și dumneata”, nu neapărat profesorii și elevii de liceu, despre care se poate într-adevăr presupune că ...presupun matematica de liceu... Și nici un elev nu poate termina lectura cărții lui Courant și Robbins înainte de a trece în anul trei de facultate. Iar în acest timp va toci cîteva creioane citind cartea. *Ce este matematica?* este o foarte bună *introducere* în matematică, dar ea este mult mai mult decît o carte de popularizare.

O cale de mijloc, cu mai mari șanse de reușită este alegerea unui unic domeniu matematic, de tipul topologiei, teoriei mulțimilor, teoriei numerelor și de prezentat gradat (verbal) suficiente noțiuni pentru a intra totuși în profunzimile domeniului. O excelentă carte de acest gen este *Excursie în teoria mulțimilor* de N.I. Vilenkin, tradusă în 1972 la Editura enciclopedică română. Dezavantajul unei asemenea cărți este însă monotonia și necesitatea parcurgerii ei de la început la sfîrșit, în ordine și suficient de atent, pentru a reține ceea ce este necesar în continuare.

Am unele îndoieli în ceea ce privește răbdarea și timpul pe care „omul de pe stradă” este dispus să le cheltuiască parcurgînd o carte de popularizare a matematicii.

Și totuși, cartea de față vrea să fie o carte de popularizare a matematicii, ba mai mult, are dorința (nesecretă, fiind dezvăluită chiar acum!) ca, cel puțin la o primă lectură, să poată fi parcursă, de exemplu, în tren, ca o carte de literatură (cam de la București la Curtea de Argeș, cu „personalul” bineînțeles). Două trăsături ale ei sper să dea consistență acestei dorințe: alegerea subiectelor și forma de prezentare.

Voi alege mai ales subiecte aflate la interferența matematicii cu „restul”, subiecte și rezultate cu implicații (uneori tulburătoare) dincolo de matematică, unele dintre ele avînd

de-a face cu tema reconfortantă pentru „umanişti“ a existenței limitelor matematicii, ale matematizării. Căci, într-adevăr, acest monstru cenușiu, matematica, nu poate chiar tot...

Că matematica este cenușie pot confirma cam 75% din elevii din orice clasă, deci implicit, cam 85% din populația adultă este de aceeași părere. La o analiză mai insistentă, din aceste procente, marea majoritate a subiecților vor da însă prompt vina pe profesori, pe manuale, pe culegeri, în general, pe toate cărțile de matematică. Și nu fără dreptate.

Matematica nu este cenușie, ea este prezentată cenușiu.

Lucrarea de față are ambiția de a prezenta ceva mai „colorat“ faptele matematice. Se explică astfel și de ce dedic lucrarea lui Gr. C. Moisil, de ce îl iau pe Gr. C. Moisil ca patron atunci când scriu aceste rânduri. Iată de ce (se ascunde aici și o mică intenție polemică, la adresa mult-prea-riguroșilor-deci-mult-prea-cenușiilor matematicieni, care există, vai, peste tot, mai puțin, evident, în instituția la care lucrez...!): numai Moisil era în stare să compare un calculator cu o fabrică de cîrnați („Bagi pe o ușă porcul și pe altă ușă ies cîrnații. Un calculator e altfel: bagi pe o ușă cărțile perforate și pe ușa cealaltă îți iese hîrtie cu o grămadă de numere pe ea...“, din „Informația primară“, „România literară“, 15 ianuarie 1981) și apoi să aibă și curajul să scrie pe hîrtie o asemenea comparație. Ați observat, cred, încetățenirea în limbă a sintagmelor „nas subțire“ (eufemism pentru „om cult, rafinat“) și „a strîmba din nas“ (metaforă pentru „a contesta, a critica ceva, a nu-i place ceva de pe o poziție disprețuitoare“). Ei bine, se observă, de asemenea, utilizarea tot mai frecventă a raționamentului-sofism: cu cît strîmbi mai mult din nas cu atît ești un nas mai subțire... În fața celor care aplicau acest silogism (ignorînd voit existența „omului de pe stradă“, ignorînd faptul că fiecare dintre noi este un „om de pe stradă“ pentru toate științele mai puțin — cel mult — una) Moisil suridea cu surisul său care făcea uneori cît un hohot de vitriol și compara fals-senin calculatorul cu o fabrică de cîrnați. Da, dar apoi (de fapt,

în același timp) ne învăța niște lucruri nu numai serioase, ci de-a dreptul grave și care ne pătrundeau prin toți porii porpate de comparațiile lui năucitoare. (Articolul citat se încheie cu aforismul deloc hazardat: „Sînt unele minciuni care nu te caracterizează ca mincinos, ci ca înapoiat.“)

În sfîrșit, un alt suris fascinant care-mi stăruie în minte și care (sper!) va marca paginile ce urmează este surisul jumătate ironie, jumătate bonomie, altă jumătate înțelepciune și încă una malițiozitate al scriitorului Adrian Rogoz, cel care într-o zi de toamnă bucureșteană mi-a propus să scriu literatură SF cu subiecte matematice și căruia nu i-am răspuns atunci, dar încerc să-i răspund acum:

— Iată, stimat Adrian Rogoz, această carte este o carte de literatură cu subiecte matematice.

—
(În locul acestor puncte se va consemna replica lui A. Rogoz...)

Poate sînt necesare aici și cîteva lămuriri la titlul cărții. „Spectacolul matematicii?! Hm, singurele spectacole matematice sînt tragediile corigenților scoși la tablă și puși în fața unor șiruri lungi de cuneiforme, hieroglife și alte semne cabalistice peste care plutește un mister mai de nepătruns decît cel din ochii Sfînxului... Despre așa ceva va fi vorba mai departe?...“ Urmează, eventual, o strîmbătură din nas, una de alt gen decît cele despre care vorbeam cu o pagină mai înainte.

Ei, nu, pe cît voi putea, voi încerca să nu prezint deloc tragedii. Iar titlul conține cuvîntul spectacol pentru a vă sugera cumva detașarea de ceea ce se vede pe scenă, mai ales de efortul celor de pe scenă și care nu trebuie să ajungă în sală, printre spectatori, printre dumneavoastră. Spectatorul trebuie să se distreze, nu să transpire. Că distrîndu-se învață ceva, asta este altă căciulă; cu atît mai bine dacă învață.

Evident, actorii pe care îi voi aduce la rampă sînt aleși conform simpatiilor mele personale. Ținînd seama că scenariul și regia, costumele și ilustrația muzicală îmi aparțin (este un fel de a spune, mai curînd eu le aparțin lor), slăbi-ciunea mea față de unii actori, protejarea unora în detrimen-

tu alora nu trebuie să supere pe nimeni. Mai ales că uneori vă las să priviți și în culise, la dedesubturile spectacolului și la bîrfele protagoniștilor, iar actorii sînt în fața spectato-
 rilor și în pauze și chiar și după spectacol. Așa se și explică eterogeneitatea scenariului, absența unui fir director con-
 secvent. De fapt, acesta este principalul fir director: lipsa oricăruia. Curat spectacol de varietăți (fără balerini și bale-
 rine...)!

2. CE ESTE MATEMATICA?

Ei bine, tinere cititor, dacă ai nutrit cumva speranța că după citirea acestui paragraf vei afla, în sfîrșit, răspunsul la întrebarea din titlu, că vei ști adică ce este matematica, onest fiind, va trebui să te previn de la început că vei fi puțin dezamăgit. Nici după citirea întregii cărți nu vei afla răspunsul; și nici după citirea oricărei alte cărți. Pentru că o asemenea definiție nu există, toate încercările de circum-
 scriere a ceea ce este matematica au slăbiciuni evidente, le putem găsi contraexemple fără eforturi prea mari.

Să începem cu *Dicționarul limbii române moderne*, apărut în 1958 sub egida Academiei R.S. România. Citim la pagina 482, coloana din stînga: „MATEMATICĂ, matematici, s. f. Știință care se ocupă cu studiul mărimilor, al relațiilor cantitative și al formelor spațiale“. Că matematica este o știință, de acord, că ea se ocupă cu ceea ce scrie mai sus, iar sînt de acord. Dar matematica se ocupă cu mult mai multe alte lucruri. Teoria grafurilor nu pare a intra nici la „studiul mărimilor“, nici la cel al „relațiilor cantitative și al formelor spațiale“. Un graf nu se referă la mărimi, iar forma lui nu are nici o importanță. Cu atît mai mult teoria algoritmilor, teoria limbajelor formale, informatica în general sau acele părți ale ei care sînt fără dubiu acceptate ca fiind matema-
 tică, nu sînt prinse în definiția de mai sus. S-ar putea obiecta, de pildă, că teoria limbajelor formale nici nu exista ca teorie în 1958, iar informatica abia se naștea. Parțial obiecția este motivată. Ce ne facem însă după ce deschidem *Dicționarul*

de neologisme (autori Florin Marcu și Constant Maneca) apărut — ediția a III-a — tot la Editura Academiei R.S. România, în 1978 și care în dreptul cuvîntului MATEMATICĂ, la pagina 660, coloana din dreapta, ne informează că aceasta este o „știință care studiază mărimile, relațiile cantitative și formele spațiale“? Nimic nou sub soare! Iar în două decenii s-au publicat zeci de cărți în teoria limbajelor formale...

Să cercetăm și un „Larousse“ (sună așa de frumos să treci printr-un „Larousse“ atunci cînd cauți o definiție...). La pagina 166, pe coloana din mijloc, *Nouveau Larousse Universel*, vol. 2 (apărut în 1949), scrie că matematica este o știință care are ca obiect proprietățile mărimilor prin ceea ce au ele calculabil și măsurabil. E adevărat că apoi se enumeră ramurile matematicii (începînd cu împărțirea discutabilă în matematici pure și aplicate), se face istorie, se dau nume, două coloane consistente sînt dedicate matematicii, dar cu definiția anterioară evident că nu se poate face mare lucru.

Nu ne putem descurca cu dicționarele...

Adevărul este că definirea matematicii stă sub semnul aceluiași cere vicios de care vorbea Wilhelm Dilthey în legătură cu definirea filozofiei: Pentru a putea spune ce este filozofia (matematica), trebuie să avem la îndemînă un criteriu clar prin care să delimităm ceea ce este al filozofiei (matematicii) de ceea ce nu este al ei. Dar, pentru aceasta, trebuie să știm dinainte ce este filozofia (matematica), altfel nu putem opera o asemenea delimitare.

Definirea matematicii prin obiectul ei de studiu este o sarcină grea nu numai pentru dicționare, ci și pentru matematicieni. Robert Courant și Herbert Robbins, în cartea de 550 de pagini cu titlul-obsesie *Ce este matematica?* (Editura științifică, București, 1969, traducere după Oxford Press, London, 1941), după ce se referă (în vorbe) la dificultatea de a da o definiție matematicii (dedică numai 4 pagini acestui subiect), trec apoi la a indica (matematic) ce cuprinde matematica. Iată titlurile capitolelor cărții, deci iată cîteva dintre capitolele matematicii (în 1941): numerele naturale, teoria numerelor, sistemul de numere ale matematicii,

algebra mulțimilor, construcții geometrice, algebra cîmpurilor de numere, geometria proiectivă, axiomatica, geometrii neeuclidiene, geometrie în spații cu mai mult de trei dimensiuni, topologie, funcții și limite, maxime și minime, calcul diferențial și integral.

Nu mă refer la omisiuni. Cititorul le poate găsi singur. Să consemnăm însă premisa de la care pleacă autorii cărții: „Pentru specialiști, ca și pentru amatori, nu filozofia, ci experiența activă în însăși matematică este singura care poate da răspuns întrebării: ce este matematica?” (pagina 16).

Asta-i, cititorule: amină-ți întrebarea pînă ce dobîndești o asemenea „experiență activă”. La o comemorare a lui Gr. C. Moisil, reputatul filozof Constantin Noica povestea următoarea parabolă. La un înțelept indian vine un tînăr și-i pune întrebarea: „Spune-mi, înțeleptule, ce este sinele meu?” Înțeleptul răspunde: „Vino peste treizeci de ani și întreabă-mă din nou”. După treizeci de ani fostul tînăr revine și întreabă: „Spune-mi, preaițeleptule, ce este sinele meu?” Înțeleptul răspunde la fel ca acum trei decenii...

Este adevărat, la pagina 13, R. Courant și H. Robbins încearcă, nu o definiție riguroasă, ci una literară a matematicii. „Matematica reflectă *voința activă, rațiunea contemplativă și dorința de perfecțiune estetică. Elementele ei de bază sînt logica și intuiția, analiza și construcția, generalul și concretul*. Cu toate că diferitele tradiții pot sublinia aspecte diferite, doar interacțiunea acestor forțe polare și lupta de a le sintetiza constituie viața, utilitatea și valoarea supremă a științei matematice” (s. n.).

Repet, autorii nu vor să dea o definiție, ci doar să caracterizeze esența matematicii. Dar, nicăieri nu poate fi găsită mai multă *voință activă, rațiune contemplativă și dorință de perfecțiune estetică* decît într-o... operă literară. Iar *logică și intuiție, analiză și construcție, general și concret* nicăieri nu găsim mai din abundență ca într-un bun... roman polițist!

O strategie uzuală atunci cînd se scrie într-o carte un paragraf cu titlul „Ce este matematica?” este de a consemna părerile altora, eventual fără comentarii, pentru a-l lăsa pe cititor să aleagă (era gata să scriu... pentru a-l lăsa pe cititor

în același punct de unde a început lectura, eventual entuziasmat — și complexat puțin — de erudiția autorului...).

Este exact modul în care voi proceda în continuare!

Iată-l, de pildă, pe entuziastul Pitagora: „Matematica este calea de înțelegere a Universului. Numărul este măsura tuturor lucrurilor.” (În paranteză fie spus, Pitagora diviniza la propriu numerele; numărul 10, ca număr triunghiular, suma unui număr triunghiular de numere triunghiulare: $10 = 1 + 3 + 6$ — figura 2.1 — îi provoca revelații cu totul cerești!)

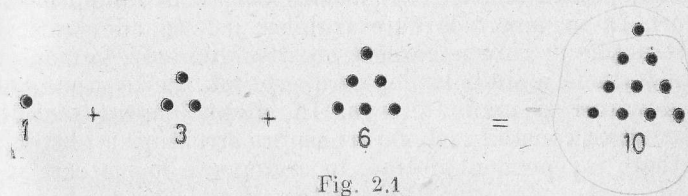


Fig. 2.1

Cu mai multe secole mai tîrziu și dintr-o poziție mult mai activă vizavi de natură, Galileo Galilei exclama: „Legile naturii sînt scrise în limba matematicii” (citat uneori sub forma „cartea naturii este scrisă în...”).

În prima parte a secolului nostru, matematicianul și filozoful Bertrand Russell lansa două butade care au ajuns celebre: 1. Matematica este acel lucru pe care un mare număr de oameni competenți îl fac și îl numesc astfel. 2. Matematica este acea știință în care se raționează corect cu propoziții despre care nu se știe dacă sînt adevărate sau nu.

Prima afirmație nu mai cere comentarii. A doua trebuie înțeleasă în raport cu fundamentarea axiomatică a teoriilor matematice, cadru în care adevărul sau falsitatea axiomelor (și deci al tuturor consecințelor lor) nu interesează în cadrul teoriei însăși; teoria se ocupă numai de dezvoltarea ei corectă, necontradictorie. Într-o carte apărută în 1943, Morris Kline scrie ceva asemănător celei de-a doua butade a lui Russell: „Matematica este un corp de cunoștințe. Dar ea nu conține adevăruri...”

Criticînd superficialitatea afirmației lui M. Kline, Nicolas D. Goodman, într-un articol cu titlul definiție „Matematica — știință obiectivă” („The American Mathematical Monthly”, 86, 7 (1979)), se referă critic la modul de înțelegere a matematicii în cadrul unor curente filozofice care i-au marcat evoluția. Astfel, pentru *formalist* matematica este manipularea formală, guvernată de reguli precise, a simbolurilor și nimic altceva, pentru *intuitionist* matematica constă în construcții intuitive, în manipularea formală a simbolurilor care sînt expresia externă a acestor construcții și nimic altceva, pentru *logicist* matematica constă în anumite adevăruri, în argumentele care stabilesc aceste adevăruri, în construcțiile pe care se bazează aceste argumente, în manipularea formală a simbolurilor care exprimă aceste argumente și adevăruri și nimic altceva. În sfîrșit, pentru *platonist* matematica constă în adevăruri asupra structurilor abstracte existente independent de noi, în argumente logice care stabilesc aceste adevăruri, în construcții pe care se bazează aceste argumente, în manipularea formală a simbolurilor care exprimă aceste argumente și adevăruri și din nimic altceva. Cuvintele „și nimic altceva” cu care se încheie fiecare încercare de definiție îi furnizează lui N.D. Goodman argumente pentru a respinge pe rînd fiecare definiție, ajungînd în final la formularea necesității construirii unei filozofii largi a științei în cadrul căreia să-și facă loc o filozofie adecvată a matematicii, care „să clarifice în ce sens există o unică lume obiectivă și cum este aceasta obiectul studiat de matematician, obiect în mare parte fără realitate fizică, deci fără a putea fi identificat ca parte a acestei lumi”.

În același număr din „The American Mathematical Monthly”, sub semnătura lui Ernst Snapper și sub titlul (iarăși!) „Ce este matematica?”, apare o definiție „matematică” a acestei științe greu de definit: „Matematica constă în orice poate fi formulat și demonstrat în limbajul și axiomele lui Zermelo și Fraenkel”. (La sfîrșitul secolului trecut și începutul secolului al XX-lea, Zermelo și Fraenkel au dat un cunoscut sistem de axiome pentru teoria mulțimilor.) Definiția pare într-adevăr cuprinzătoare (doar unele „franjuri”

ale teoriei categoriilor, după expresia lui E. Snapper, rămîn în afară), dar, din nou trebuie să știm ce se poate formula și demonstra matematic (în formalismul Z & F) pentru a ști ce este matematica!

Voi încheia lista citatelor preluînd, tot din „The American Mathematical Monthly” (87, 2 (1980)), cîteva cuvinte ale lui R.W. Hamming: „Instrumentul nostru principal pentru a duce la bun sfîrșit șirurile lungi de raționamente cerute de știință este matematica. Matematica poate fi definită ca fiind instrumentul mental desemnat pentru acest scop.” Și, mai departe: „Lumea pare a fi organizată într-o structură logică ce paralelizează mare parte a matematicii; matematica este limbajul științei și ingineriei.”

Un lucru este clar după toate aceste citate: demiurgul este matematician!...

Pentru a încheia totuși pe un ton serios acest paragraf și pentru a afla (în sfîrșit!) ce este matematica, voi enumera rubricile din „Mathematical Reviews”, revista Societății Americane de Matematică (A.M.S.), care recenzază lunar articole de matematică (aproape toate) apărute în lumea întreagă. Periodic, revista reface clasificarea domeniilor matematicii, clasificarea din 1979 arătînd astfel (cititorul care se plictisește ușor este rugat să treacă la paragraful următor):

1. Logică și fundamente,
2. Teoria mulțimilor,
3. Combinatorică,
4. Ordine, latici, structuri algebrice ordonate,
5. Sisteme matematice generale,
6. Teoria numerelor,
7. Teoria algebrică a numerelor, teoria cîmpului, polinoame,
8. Algebre și inele comutative,
9. Geometrie algebrică,
10. Algebră liniară și multiliniară, teoria matricelor,
11. Algebre și inele asociative,
12. Algebre și inele neasociative,

13. Teoria categoriilor, algebră omologică,
14. Teoria grupurilor și generalizări,
15. Grupuri topologice, grupuri Lie,
16. Funcții reale,
17. Măsură și integrare,
18. Funcții de o variabilă complexă,
19. Teoria potențialului,
20. Variabile complexe și spații analitice,
21. Funcții speciale,
22. Ecuații diferențiale ordinare,
23. Ecuații cu derivate parțiale,
24. Diferențe finite și ecuații funcționale,
25. Șiruri, serii, sumabilitate,
26. Aproximări și extinderi,
27. Analiză Fourier,
28. Analiză armonică abstractă,
29. Transformări integrale, calcul operațional,
30. Ecuații integrale,
31. Analiză funcțională,
32. Teoria operatorilor,
33. Calcul variațional și control optimal,
34. Geometrie,
35. Mulțimi convexe și inegalități geometrice,
36. Geometrie diferențială,
37. Topologie generală,
38. Topologie algebrică,
39. Complexe celulare și multiple,
40. Analiză globală, analiză pe multiple,
41. Teoria probabilităților și procese stochastice,
42. Statistică,
43. Analiză numerică,
44. Știința calculatoarelor (informatică),
45. Matematici aplicate, în general,
46. Mecanica particulelor și sistemelor,
47. Mecanica solidelor,
48. Mecanica fluidelor, acustica,

49. Optica, teoria electromagnetismului,
50. Termodinamică clasică, transferul căldurii,
51. Mecanică cuantică,
52. Fizică statistică, structura materiei,
53. Relativitate,
54. Astronomie și astrofizică,
55. Geofizică,
56. Economie, cercetări operaționale, programare, teoria jocurilor,
57. Biologie și științe comportamentale,
58. Sisteme, conducere,
59. Informație și comunicare, circuite, automate.

Fiecare dintre aceste domenii este la rindul lui împărțit în mai multe sub- și sub-sub-domenii. De exemplu, *Teoria numerelor* este împărțită în sub-domeniile: 1. Teoria elementară a numerelor, 2. Ecuații diofantice, 3. Forme (pătrate), 4. Teoria funcțiilor și formelor automorfice și modulare, 5. Geometria numerelor, 6. Aproximări diofantice, 7. Sume trigonometrice și exponențiale, 8. Teorie multiplicativă, 9. Teorie aditivă, 10. Teorie probabilistă, măsură, dimensiuni etc., 11. Șiruri de întregi, 12. Aritmetica rațională a obiectelor algebrice, 13. Legături cu logica, iar *Geometria numerelor* cuprinde sub-sub-domeniile: 1. Latici și obiecte convexe, 2. Obiecte neconvexe, 3. Produse de forme liniare, 4. Minime de forme, 5. Forme pătrate, 6. Acoperiri laticiale, 7. Teoreme de valori medii, 8. Teoreme de transfer, 9. Grupuri de automorfisme ale laticilor, 10. Nici una dintre cele anterioare, dar în acest sub-domeniu.

Lista totală a sub-sub-domeniilor este impresionantă. Clasificarea A.M.S. din anul 1979 ocupă patruzeci și șapte de pagini scrise destul de mărunț pe cite două coloane...

O foarte interesantă (dar aproape imposibilă) carte ar fi cea care ar conține exact 59 de paragrafe, fiecare dintre acestea încercând să definească „ce este” fiecare dintre cele 59 de domenii enumerate mai sus.

Cartea de față nu va avea 59 de paragrafe...

3. DESPRE LIMITELE MATEMATICE

Una din tezele de bază ale psiho-filozofiei freneticilor cuceritori ai vestului sălbatic era cea cu privire la nelimitarea preriei, la posibilitatea de a împinge la nesfârșit hotarele „civilizației”. Probabil că mulți oameni nutresc un sentiment asemănător în legătură cu matematica (doar... demiurgul este matematician, nu?): „Nu s-a reușit cutare lucru pînă astăzi? Se va face miine. Se va dezvolta o teorie nouă care va rezolva și această problemă. Limitele matematicii pot fi împinse mereu înainte.” Dezvoltarea matematicii, de la agrimensura egipteană și pînă la informatica teoretică de astăzi, confirmă această admirabilă încredere. Să remarcăm, de pildă, că marile revoluții cosmogonice, de la Ptolemeu la Newton, de la acesta la Einstein și, în sfîrșit, de la teoria relativității la actualele modele ale universului finit, ale universului cristalizat, au fost toate însoțite de mari salturi în matematică. Afirmatia lui Galilei cum că natura este o carte scrisă în limbajul matematicii nu a fost dezmințită vreodată.

Atenție, însă! Oceanul Pacific există totuși! Întotdeauna există un Ocean Pacific! Nici vestul nu este nelimitat și nici matematica nu este omnipotentă. Viziunea necritic entuziastă privind posibilitățile de dezvoltare a matematicii trebuie să se replieze în fața numeroaselor rezultate care sugerează existența unor bariere inerente matematicii, instrumentelor și tehnicilor sale. Nu este vorba aici de mica răutate pe care am auzit-o odată din gura unui inginer: „un matematician este acel om care este în stare să rezolve orice ecuație, absolut pe oricare, mai puțin pe acelea care-i sînt necesare inginerului”. Există și asemenea limite, dar acestea pot fi într-adevăr împinse mereu înainte, depășirea lor este o simplă problemă de performanță (matematică și tehnică), de evoluție a instrumentelor. Aici și în cîteva dintre paragrafele care urmează mă voi referi însă la limite pe care matematica însăși și le definește și le precizează locul.

Pentru că există și asemenea limite.

Propunîndu-și să vorbească despre ele, Oskar Becker își începe prefața unei cărți cu acest subiect cu fraza: „Blaise Pascal a scris despre măreția și mizeria omului, Honoré de Balzac despre strălucirea și decadența curtezanelor; de ce nu s-ar putea scrie și despre măreția și mizeria matematicii?” Peste cîteva rînduri el se repliază însă (cine și-ar putea intitula o lucrare „Despre măreția și mizeria matematicii?”), astfel încît cartea sa poartă titlul *Măreția și limitele gîndirii matematice* (Editura științifică, București, 1968). În conținut, cartea lui O. Becker pledează însă mai ales pentru măreție, limitele fiind găsite de însăși gîndirea matematică și depășite adesea prin trecerea la un nivel superior de sofisticare a acestei gîndiri, ele reîntorcîndu-se astfel ca argumente în favoarea măreției însăși. „În baza celor precedente, pare că nu poate fi vorba de vreo limită în domeniul gîndirii matematice. Toate încercările noastre de pînă acum, îndreptate înspre identificarea unei asemenea bariere au eșuat” (op. cit., pagina 172). „Limitele gîndirii matematice nu se află, așadar, în traiectoria avansării sale naturale; ea întilnește asemenea limite numai în momentul în care este abătută de pe calea sa naturală, fiind îndreptată către lucruri pentru care nu este pregătită. Dar aceste limite nu sînt ale sale proprii. Ele sînt obstacole care aleargă paralel cu drumul ei, pentru a împiedica abaterea ei de la direcția cea dreaptă; ele nu reprezintă deci bariere care ar putea împiedica progresul ei rectiliniar” (op. cit., pagina 180).

Asemenea „obstacole paralele cu drumul” sînt pentru O. Becker antinomiile teoriei naive a mulțimilor, paradoxurile logice, teoremele lui Gödel privind neformalizabilitatea completă a aritmeticii. Aici ne vom plasa însă în situații particulare, mai bine circumscrise, cu referire la instrumente matematice concrete, nivel la care limitele trebuie resimțite ca limitări veritabile, costul depășirii lor, atunci cînd acest lucru este posibil, fiind adesea nerezonabil de mare. Mai exact, limitele vor fi legate de așa-numitele *teoreme de imposibilitate*, destul de numeroase deja și cu semnificații care trec mult dincolo de matematică.

În principiu, o teoremă de imposibilitate este o teoremă care afirmă că ceva căutat, dorit, așteptat de multă lume, nu există, nu poate exista, nu se poate face. Nu orice rezultat de tip negativ este o teoremă de imposibilitate. Criteriul de definire este tocmai acesta, al semnificației pentru „omul de pe stradă“, de cele mai multe ori sinonim cu interesul îndelungat și răspîdit pentru problema pe care teorema o tranșează negativ. Acesta este și principalul motiv pentru care astfel de teoreme de imposibilitate pot fi gîndite ca definind limite ale matematicii (limite ale unei anumite părți a matematicii, pentru anumiți utilizatori ai ei).

Exemplul tipic (discutat în secțiunea următoare) este cel al celebrei teoreme a lui Arrow (nu voi face alte precizări aici; orice capitl al unei bune cărți politiste trebuie să se termine cu un „cîrlig“ care să facă imposibilă renunțarea la lectură. Teorema lui Arrow este un asemenea cîrlig: ea spune că, într-un anume sens, nu se pot lua decizii raționale... (Curios lucru, nu?)

Rezultatele afirmate de multe dintre teoremele de imposibilitate au intrat în literatura matematică și filozofică sub numele de paradoxuri. Se vorbește curent despre paradoxul lui Arrow, paradoxurile lui Gödel etc. Evident, nu este vorba aici de paradoxuri în accepțiunea din logică („Eu acum mint“ este un asemenea paradox logic, propoziția nu poate fi nici adevărată și nici falsă, dacă ea este adevărată, atunci ea este falsă, iar dacă este falsă, atunci ea trebuie să fie adevărată), ci de situații paradoxale, neobișnuite, șocante. Să ne gîndim, de pildă, la problema agregării preferințelor de care este legată teorema lui Arrow. Faptul că regula electorală a majorității (cine are mai multe voturi, acela este ales), atît de folosită și atît de „obiectivă“ în aparență, poate falsifica uneori preferințele reale, ducînd la rezultate mult diferite de cele „raționale“, este evident un fapt paradoxal. Că *orice* metodă de agregare a voturilor suferă de aceleași slăbiciuni este deja un rezultat de două ori uimitor și tulburător, deci paradoxal. Din același punct de vedere, paradoxale sînt și teoremele lui Gödel, precum și teorema de imposibilitate a agregării indicatorilor.

Este adevărat, paradoxurile se tocesc cu timpul, devin banalități, apoi de-a dreptul prejudecăți, după cum ne prezența Moisi. Teoremele enumerate sînt încă paradoxale, deși unele au deja citeva decenii de cînd ne-au violentat prejudecățile anterioare lor.

Mare parte a prestigiului de care se bucură matematica, multe dintre argumentele pe care se sprijină măreția ei, provin din aplicațiile ei în inginerie, astronomie, balistică, conducere economică, în tehnica de calcul electronic etc., deci din folosirea ei ca instrument. Iar cînd este vorba de instrumente matematice, sinonimul imediat este cuvîntul *model*.

Dacă vrem să studiem anatomia creierului unui om, sau efectele unui medicament asupra circulației sanguine, de exemplu, nu putem face acest lucru direct pe un om. Știînd că maimuțele ne seamănă, putem face experimente pe o maimuță. Cît timp etica ne mai lasă să facem acest lucru și cît timp în Africa se vor mai găsi maimuțe, medicina nu va duce deci lipsă de modele. Pentru că, într-adevăr, maimuțele — cel puțin pentru medicină — sînt modele de oameni.

Un model este exact aceasta, un „ceva“ care „seamănă“ cu „altceva“ și cu ajutorul căruia se pot obține cunoștințe despre „altceva“. Maimuța este model pentru om, un baraj în miniatură este modelul unui baraj real, un avion de hîrtie este un model pentru supersonicul „Concorde“ etc.

Ce facem însă dacă ne interesează, de exemplu, dinamica sistemului solar? Sistemele solare nu se găsesc în Africa. Un sistem-jucărie făcut din bile nu ne va spune mare lucru despre sistemul real. Singură matematica ne poate ajuta: putem construi din simboluri și cifre un model care să „prindă“ legile de mișcare a planetelor în jurul Soarelui. Pe un sistem cu bile n-o să reușim decît cu mare greutate să prevedem eclipse de soare, un model matematic va da ușor asemenea rezultate; modelul cu bile nu va fi în stare să „prezică“ existența unei planete în plus, calculele matematice ale lui Adams și Le Verrier au „descoperit“ în 1846 planeta Neptun, necunoscută la acea dată, dar observată apoi optic exact în locul indicat de calcule. (De curînd, cîntea de a fi desco-

perit planeta Neptun i-a fost răpită întrucitva matematicii. Într-adevăr, se pare că Galilei, cu luneta sa cu lentile de numai cîțiva centimetri în diametru, a zărit în anii 1612—1613 un „astru“ necunoscut în apropierea planetei Jupiter, astru care de fapt, nu există, dar care era probabil Neptun, aflat în acea perioadă în conjuncție cu Jupiter. Galilei nu a fost conștient de ceea ce descoperise și astfel planeta Neptun a fost descoperită cu adevărat abia în secolul trecut. Amănunte pot fi găsite în articolul lui Pierre Kobler: „Galilée avait découvert Neptune... sans le savoir“, „Science et Vie“, nr. 760, ianuarie 1981, p. 34—35.)

Spre deosebire de cele analogice, modelele matematice, simbolice, au o mare independență în raport cu obiectul modelat, ceea ce le face utilizabile în cele mai variate domenii. Accepțiunea largă a cuvintului model, scopurile multiple, faptul că modelele sînt aproximări mereu perfectibile, confuzia greu de înlăturat între modelare și metodă (mai ales matematice), conduc la cvasiimposibilitatea delimitării a ceea ce este modelabil de ceea ce este nemodelabil, de a defini modelabilitatea.

Un model este model în raport cu un sistem real, nu în sine, și în perspectiva unui scop al modelării. Este însă foarte greu de spus cînd un sistem este model al altuia și cînd nu. Exagerînd puțin, orice sistem este model al oricărui alt sistem. Totul depinde de scopul în care le punem alături. Comparatia dintre calculator și fabrica de cîrnați de porc confirmă acest lucru. La fel, piciorul lui Arhimede s-a dovedit un model foarte relevant al unei coroane regale (în condițiile... euristice ale băii)!

În principiu, modelul trebuie să „semene“ cu obiectul modelat; se poate vorbi deci despre *adecvarea* lui. Cum putem evalua adecvarea? Sistemele cu adecvare nulă pot fi considerate modele cu adecvare nulă?

Discuția anterioară vrea să conducă la observația că nu se cunosc încă sisteme (sau clase de sisteme) reale nemodelabile (nemodelabile în principiu, nu nemodelate încă). Cu

alte cuvinte, lipsesc teoremele de imposibilitate referitoare la distincția dintre modelabil și nemodelabil, nu se cunosc limitele modelării matematice.

În realitate, la acest nivel extrem de general, probabil că este adevărată o *teoremă de imposibilitate privind însăși existența teoremelor de imposibilitate a modelării*.

Într-adevăr, iată un fel de „demonstrație“ a acestui lucru. Fie S un sistem real. Pentru a demonstra că S nu poate fi modelat (matematic), trebuie să ne plasăm în cadrul riguros, mai mult sau mai puțin formal, al unei logici potrivite. Demonstrația însăși trebuie să se refere la S , cu alte cuvinte, S trebuie definit/caracterizat/aproximat în cadrul logicii respective. Prin urmare, manipularea lui S în cadrul riguros în care se face demonstrația conduce tocmai la posibilitatea modelării lui S în acest cadru. Demonstrarea teoremei imposibilității modelării lui S cere și implică modelabilitatea lui S ! Ceea ce trebuie demonstrat.

Putem însă să ne punem problema modelării unor clase particulare de sisteme, sau a construirii unor modele cu proprietăți precizate. Paragrafele următoare vor discuta asemenea particularizări. Aici vom continua discutarea modelării la modul general, plecînd de la observația că există încă multe domenii în care modelarea (nu neapărat matematică) nu a dat încă rezultate satisfăcătoare, în ciuda eforturilor făcute și a unor succese parțiale. Trei domenii par a se impune în acest sens: procesele psihice, procesele sociale și cele artistice. Încercări numeroase s-au făcut în toate aceste direcții, dar, mai ales pentru specialiștii din interiorul celor trei domenii, rezultatele nu par încă mulțumitoare. În încercarea de a găsi teoreme de imposibilitate a modelării ar trebui plecat de la a vedea ce au comun domeniile în care modelarea nu a dat roade, care sînt trăsăturile nemodelabile, unde păcătuiesc modelele reale, ce a rămas în afara lor și este subiect de reproș.

Un răspuns cu totul preliminar la aceste probleme poate fi axat pe următoarele idei:

i) Modelele sînt preponderent *sintactice*, alcătuirea lor fiind de cele mai multe ori anterioară fiziologiei lor; în contrast, sistemele reale sînt preponderent *semantice*. Sistemele *sînt*, există, se autoformează și se modifică, au o istorie care le-a adus în starea prezentă. Modelarea este prin definiție un fapt artificial, violent în timp (modelarea creșterii copacilor se face într-o zi, creșterea copacului durează un secol).

ii) Punctul anterior este strîns legat de faptul că *efectul de sistem* (un sistem este altceva decît suma subsistemelor sale) este greu de caracterizat, de explicat și, implicit, de modelat.

iii) Sistemele sînt *imprecise* (în sens probabilistic, fuzzy etc.). Imprecizia se referă atît la comportarea sistemului în mediul său, cît și la comportarea pe care reușim să o prezicem mediului și sistemului. Cauza impreciziei se referă pe de o parte la bogăția parametrilor care concură la definirea sistemului, cît și la mecanismul cauzal intern sistemului sau mediului. Limitele istorice și cele concrete ale cunoașterii (resursele date) împiedică descifrarea completă a mecanismului cauzal, ducînd astfel la imprecizie.

Probabil că printr-o restrîngere potrivită a generalității, pot fi totuși obținute teoreme de imposibilitate a modelării (a modelării cu anumite proprietăți). De pildă, după definirea riguroasă a *gradului de adevăre*, probabil că în domeniul social, de exemplu, ar putea fi produse teoreme de genul următor: „Oricare ar fi pragul p , există un sistem real care nu are modele matematice cu gradul de adevăre mai mare ca p ”, sau „Pentru sistemele dintr-o clasă dată, orice model are adevărea mai mică decît un prag q ”.

Semnificațiile gnoseologice ale unor asemenea teoreme par a fi deosebit de interesante. Ce spui, tinere cititor, ai vreo idee de demonstrație? Atenție, toate ideile geniale sînt simple! (Din păcate, reciprocă acestei afirmații nu este adevărată...)

4. DE LA PARADOXUL MARCHIZULUI DE CONDORCET LA TEOREMA LUI ARROW

În timpul Revoluției franceze, în timp ce Franța își formula primele sale constituții democratice, Antoine-Nicolas Caritat, marchiz de Condorcet, a examinat îndeaproape regula electorală a majorității, ajungînd la concluzii uluitoare: regula naturală și atît de mult utilizată care spune că „cine are mai multe voturi, acela să fie ales” conduce la situații contradictorii, chiar pentru cazuri simple de aplicare a ei.

Într-adevăr, rămînînd în cadrul electoral al lui Condorcet, să considerăm un exemplu fictiv în care avem trei candidați, A , B și C , și 21 de alegători. Evident, fiecare alegător stabilește o ierarhie a celor trei candidați, potrivit părerii sale despre aceștia. Sînt posibile șase ierarhii diferite, cele șase permutări ale literelor A , B , C . Să presupunem că avem următoarea situație:

2 alegători	preferă ierarhia	$A \ B \ C$
6 alegători	preferă ierarhia	$A \ C \ B$
2 alegători	preferă ierarhia	$B \ A \ C$
5 alegători	preferă ierarhia	$B \ C \ A$
2 alegători	preferă ierarhia	$C \ A \ B$
4 alegători	preferă ierarhia	$C \ B \ A$

total 21 alegători

Aplicînd regula simplei majorități, deci cerînd alegătorilor să indice pe cîștigătorul alegerilor, ajungem la situația:

A	este indicat de 8 alegători
B	este indicat de 7 alegători
C	este indicat de 6 alegători.

Prin urmare, A cîștigă alegerile, iar C iese pe ultimul loc.

Să încercăm însă să ținem seama de întreaga informație furnizată de ierarhiile precizate mai sus, nu numai de voturile indicînd candidatul cîștigător. Să vedem, de pildă, de cîte ori este preferat A lui B și de cîte ori B lui A . Găsim că 10 alegători îl pun pe A înaintea lui B și 11 îl preferă pe B lui A ! Cu alte cuvinte, cîștigătorul alegerilor, A , este sur-

clasat de B în preferințele intime ale alegătorilor! Situația se complică dacă examinăm perechea A, C . Ultimul clasat în alegerea pe baza simplei majorități, C , este preferat lui A de 11 alegători, iar ordinea A, C este indicată numai de 10 alegători! Continuând, găsim că C este preferat lui B de 12 alegători, iar B lui C numai de 9 alegători. Ierarhia pe care o obținem este răsturnată: în loc de A, B, C ajungem la C, B, A . Regula majorității a scos câștigător candidatul aflat în realitate pe ultimul loc al preferințelor alegătorilor!

Rezultatul anterior poartă numele de efect Condorcet sau de *paradoxul lui Condorcet*.

Discuției de mai sus i s-ar putea opune argumentul că, cerind celor 21 de alegători să-și facă cunoscute ierarhiile pe care le preferă și nu numai pe ocupantul primului loc, și raționind ca mai sus, am putea evita situația neplăcută la care am ajuns. În realitate, lucrurile nu sînt chiar așa de simple.

Într-adevăr, să presupunem că ne aflăm în următoarea situație:

7 alegători indică ierarhia A, B, C

7 alegători indică ierarhia B, C, A

7 alegători indică ierarhia C, A, B .

Prin urmare, A este preferat lui B de 14 alegători, în timp ce numai 7 alegători îl pun pe B înaintea lui A . În final, A va trebui să se claseze deci înaintea lui B . Deoarece B este preferat lui C de 14 alegători, dar C se află numai de 7 ori înaintea lui B , rezultă că în ierarhia finală va trebui să apară B înaintea lui C . Am găsit deci că A este preferat lui B , iar B este preferat lui C . Ierarhia finală va fi deci A, B, C .

„Dar — oroare! — 14 alegători îl pun pe C înaintea lui A și numai 7 îl preferă pe A lui C ... În ierarhia finală nu avem voie să-l punem pe A înaintea lui C ! Paradoxul lui Condorcet este la datorie!

Două observații se impun în acest moment.

În primul rînd, discuția anterioară a fost plasată în cazul electoral mai mult din motive istorice. De fapt, situația cu care sîntem confrunțați este de un tip mult mai general

și anume se referă la o *alegere multicriterială*. Căruia sînt obiecte de ierarhizat, iar alegătorii sînt criterii de ierarhizare. Asemenea situații sînt nenumărate. Deciziile de grup sînt exact de acest tip; majoritatea (dacă nu toate) deciziilor economice sînt multicriteriale.

Ajuns în acest punct, nu mă pot abține să nu prezint un exemplu concret, împrumutat din „Revista economică” nr. 3, 19, 1980 (A. Hînescu, V. Burja, „Modalități de luare a deciziilor economice optime”). Exemplul se referă la alegerea pentru achiziționare a unor utilaje de prelucrare a lemnului, mai exact, a unor „ferăstraie circulare multiplu tivite și spintecate și cu avans mecanic” (să mai spună cineva că numai matematica este ermetică...). Un asemenea utilaj trebuie apreciat din mai multe puncte de vedere, printre care:

- lățimea de tivire (măsurată în mm),
- înălțimea de tăiere (mm),
- putere instalată (CP),
- greutate (kg),
- preț de achiziție (lei),
- numărul de pînze (în numere naturale...).

Fiecare criteriu induce o ierarhie a ofertelor disponibile la un moment dat. Care este totuși cel mai bun „ferăstrău circular multiplu tivit și spintecat și cu avans mecanic”? Trebuie să agregăm aceste ierarhii, să le sintetizăm, să le suprapunem, să obținem o singură ierarhie a „ferăstrrrr..., creccc... multiplu tv...tv și spteecc... vrrr...“.

De fapt, la orice opțiune, noi facem proză fără să știm; deciziile zilnice ale fiecăruia dintre noi sînt — explicit sau implicit — multicriteriale. Ca să nu mai vorbim de importanta problemă a clasamentelor sportive anuale, cînd fiecare ziarist, fiecare antrenor, în general, fiecare specialist în fotbal indică o ierarhie copios diferită de cele ale confrăților și redacția revistei „Flacăra” este nevoită să le sintetizeze pînă la o unică ierarhie... Regula majorității va conduce la paradoxul lui Condorcet în oricare dintre aceste situații.

Ajungem astfel la a doua observație. Bine, dar regula majorității este numai una dintre regulile pe care le putem

adopta. Să alegem alta. Să acordăm, de exemplu, note rangurilor în ierarhiile inițiale (așa cum un matematician contemporan lui Condorcet — pe nume Borda — îi propunea acestuia), să însumăm aceste note pentru fiecare candidat și să-i ordonăm în funcție de totalurile obținute. Sau, altfel, să căutăm acea ierarhie care „seamănă” cel mai mult cu mulțimea ierarhiilor inițiale (asemănarea poate fi evaluată în multe feluri). Se pot inventa multe alte metode similare.

În realitate, chiar s-au propus câteva zeci de metode de agregare a ierarhiilor. Motivul este dublu. Importanța problemei, aplicațiile ei extrem de numeroase justifică eforturile în direcția rezolvării ei. Pe de altă parte, toate metodele existente au dezavantaje și slăbiciuni care fac necesare noi metode. (Să ne amintim de regula majorității și de paradoxul lui Condorcet.) Totuși, în ciuda marelui număr de metode propuse, problema sintetizării ierarhiilor nu este rezolvată. Toate metodele sunt criticabile (și criticate!), dacă aplicăm mai multe metode unei probleme, obținem, de cele mai multe ori, atâtea soluții cîte metode am folosit... Întrebarea naturală care se ridică este: există o metodă de sintetizare a ierarhiilor care să reziste tuturor criticilor și care să nu dea naștere la paradoxuri de tip Condorcet, care să rezolve definitiv problema?

Răspunsul este, din păcate, negativ. *Nu există nici o metodă „rațională” de agregare a ierarhiilor* și această afirmație tulburătoare face obiectul teoremei lui Arrow. Raționalitatea unei metode este definită de Arrow prin intermediul a cinci condiții naturale, aparent inofensive fiecare în parte, firești pentru orice metodă de agregare. Iată-le, într-o prezentare foarte informală:

- C1. Există cel puțin trei obiecte de ierarhizat și cel puțin două criterii de ierarhizare (netrivialitatea problemei).
- C2. Dacă obiectul A este înaintea obiectului B în toate ordonările inițiale, atunci A este înaintea lui B și în ordonarea de sinteză (optimalitate Pareto).
- C3. Ordinea finală a oricăror două obiecte depinde numai de ordinea lor în ierarhiile inițiale (independență).

C4. Ordinea finală a oricăror două obiecte nu este impusă dinainte (suveranitate).

C5. Ierarhia finală nu trebuie neapărat să fie identică cu o ierarhie inițială fixată (absența dictatorilor).

Simplitatea celor cinci condiții nu mai are nevoie de subliniere; condițiile sînt de-a dreptul anodine, după expresia lui Antoine Stoetzel, un tînăr francez dispărut prematur într-un accident de avion, înainte de a-și termina redactarea unei teze de doctorat în care se ocupa tocmai de problema agregării ierarhiilor.

Și totuși, deși atît de simple, de inofensive, cele cinci condiții exclud existența unei metode de agregare care să le satisfacă simultan; mulțimea celor cinci condiții este contradictorie.

Teorema lui Arrow este adesea formulată și în următoarea formă, mai șocantă ca exprimare, dar în fond aceeași: orice metodă de agregare a ierarhiilor care satisface condițiile C1, C2, C3, și C4 aparține unui dictator (adică violează condiția C5).

Trebuie să remarcăm faptul interesant că deși formularea și demonstrarea teoremei cer o abilitate matematică destul de ridicată, matematica însăși folosită de teoremă este cu totul elementară: noțiuni de bază de logică, teoria mulțimilor, algebra relațiilor. Un rezultat profund și foarte important poate fi obținut chiar la nivelul matematicii școlare! Iar în 1972, Kenneth J. Arrow, profesor de științe economice la Universitatea Harvard, a primit premiul Nobel pentru rezultatele sale în domeniul deciziei sociale.

Teorema lui Arrow (demonstrată la începutul anilor '50) a declanșat cercetări intense în domeniul agregării ierarhiilor; bibliografia conexă este impresionantă. Există în replică multe „teoreme de posibilitate” care afirmă existența metodelor de agregare în cazul în care se relaxează unele dintre condițiile lui Arrow, adoptîndu-se alte nivele de raționalitate. Aici voi remarca doar faptul că în situația în care există numai două obiecte de ierarhizat (renunțăm la condiția C1), atunci teorema lui Arrow nu mai funcționează și alegerea „rațională” devine posibilă. (Poate tocmai din cauza acestui

lucru — Condorcet era francez doar — în turul doi al alegerilor prezidențiale din Franța numai doi candidați rămân în competiție.) Într-adevăr, situațiile minimale în care a fost pus în evidență paradoxul lui Condorcet conțineau întotdeauna cel puțin trei obiecte de ierarhizat. Pe de altă parte, dacă se impune o condiție suplimentară de „colaborare” între criterii (o cerință minimă de corelare între ierarhiile inițiale, de asemănare a lor), atunci din nou teorema lui Arrow nu mai este valabilă și agregarea este posibilă.

Există deci situații practice în care rezultatele lui Condorcet și Arrow nu ne împiedică să găsim ierarhii agregate „raționale”.

5. PRELIMINARII LA O PARALELĂ NECESARĂ: MATEMATICA ȘI LITERATURA SF

În planurile inițiale, a cincea secțiune din lucrarea de față nu trebuia să fie cea care este acum, ci aceea referitoare la teoremele lui Gödel. Dar prea este apropiată promisiunea făcută în primele pagini, cum că voi încerca să scriu o carte care să se poată citi în tren, și prea lasă teorema lui Arrow o senzație pesimistă în urma ei, pentru a risca să vorbesc acum despre Gödel. Cel puțin până la Titu aș vrea ca cititorul să nu închidă cartea. (Așa au ajuns pe locul șapte teoremele de imposibilitate a formalizării aritmeticii.)

Rîndurile ce urmează sînt prilejuite și în oarecare măsură chiar provocate de recenta apariție a primei cărți românești de critică a literaturii științifico-fantastice¹ (voi folosi prescurtarea SF, în acord cu titlul acestei cărți și cu obiceiurile locului). Așa cum s-a subliniat în mai multe ocazii, lucrarea lui Florin Manolescu este o excelentă prezentare „pe orizontală” a genului SF, care face posibilă și în același timp necesară abordarea lui „pe verticală”, pe teme, procedee, relații. Posibilă deoarece prin actualul demers critic, atît de controversată, dar atît de îndrăgita literatură SF

¹ Florin Manolescu, *Literatura SF*, Editura Univers, București, 1980.

„devine conștientă de propria tradiție și pătrunde în conștiința criticii și a istoriei generale a literaturii” noastre (op. cit., p. 275) și necesară deoarece etapa investigării de adîncime este obiectiv următoarea și este atestată de evoluția tuturor genurilor literare, de la noi și de aiurea, inclusiv a genului SF.

Ceea ce se încearcă în continuare este dezbaterea unei relații care ar putea nedumeri pe mulți, dar n-ar trebui să mire pe nimeni, martor mi-e Grigore C. Moisil (vezi volumul *Știință și Umanism*, Edit. Junimea, Iași, 1979) și pledoarie rîndurile de față!

Înainte de a trece însă „la lucru”, vreau să atrag atenția asupra precauției din titlu („Preliminarii la...” și să fac mărturisirea, autocritică într-un anume sens, că (îmi place să cred) sînt nu numai *de formație*, ci și *de deformație* practicant al primului termen al paralelei enunțate. Evident, riscurile pentru cititor nu sînt de a vedea aici simboluri matematice, depășesc cu plăcere această tentație, ci de a înțilni o pledoarie *pro domo* (eventual, *pro domibus*) atît de specifică încît să sugereze sofismul că „ceea ce nu este întins pe orizontală este, prin comparație, ceva vertical”.

De fapt, ceea ce-și propune secțiunea de față este numai demonstrarea necesității investigării relației matematică-literatură SF. La modul formal, această intenție poate fi acoperită de un raționament silogistic, rudă apropiată multor raționamente din literatura SF. Într-adevăr, pe tema relației dintre știință și literatura SF s-a consumat multă cerneală. Nașterea însăși a genului SF a fost condiționată de dezvoltarea științei, de trecerea rezultatelor științifice din laboratoare și tomuri, în viață și filozofie. Dar nu numai originea, ci și evoluția ulterioară și chiar cea prezentă a literaturii SF sînt marcate de progresele în știință. Relația știință-literatură SF este astfel de primă importanță în studiul (fie el orizontal sau vertical) fenomenului SF. (Cartea în discuție dedică un întreg capitol acestei chestiuni.) Dar, și fraza este atribuită multor personalități ale căror nume au jalonat istoria cunoașterii umane, o știință este știință mai ales în măsura în care ea este matematizată. Iar Gauss, cel pe

care multă lume îl consideră a fi cel mai mare matematician al tuturor timpurilor, spunea că „matematica este regina științelor“. Aceste dictoane constituie al doilea termen al silogismului anunțat și, împreună cu primul, conduc la concluzia că relația dintre matematică și literatura SF este cel puțin la fel de necesar de clarificat pe cât este de necesară examinarea relației dintre știință în general și literatura SF.

Raționamentul (sofism?) anterior face plauzibilă existența unor dovezi concrete ale osmozei dintre cele două domenii. Cum asemenea dovezi există cu îndestulare, ele se reîntorc asupra raționamentului întărindu-i concluzia.

Intr-adevăr, foarte multe idei, rezultate, noțiuni și probleme matematice sînt folosite firesc și profitabil în producții ale literaturii SF, și aceasta se întîmplă chiar și la autori care nu au o educație matematică organizată (deși există destui matematicieni de profesie care s-au „dedat“ literaturii SF), dar au o cultură matematică adecvată. Pentru a aduce cîteva exemple, mă voi referi numai la literatura SF românească a ultimilor ani. Ciudata bandă a lui Moebius, banda cu o singură față, banda la care „înăuntru“ este confundat cu „afară“, este o prezență cu valențe filozofice obsesiv exploatate. Pentru a nu cita decît două nume, Ovid S. Crohmălniceanu folosește foarte „matematic“ această bandă în povestirea „Prima lecție de geometrie“ din volumul *Istorii insolite* (Editura Cartea Românească, București, 1980) (pe banda lui Moebius o rotație și o translație sînt suficiente pentru a suprapune o figură peste imaginea ei în oglindă), iar Mircea Opriță își intitulează o povestire din *Semnul licornului* (Editura Albatros, București, 1980) chiar „Inelul lui Moebius“ (aici apare metafora benzii, nu banda ca atare). De altfel, „Prima lecție de geometrie“ implică esențial și o altă chestiune matematică, celebra problemă a celor patru culori, care a preocupat atît pe matematicieni cît și pe amatori de raționamente ingenioase mai mult de un secol. (De semnalat că între timp problema a fost rezolvată de doi cercetători de la Universitatea din Illinois, cine știe, poate chiar foști copii mutanți, ca aceia din povestirea reputatului critic...) Să recitim și cîteva rînduri din nota de subsol

de la pagina 265 din *Prețul secant al genului* (Editura Albatros, București, 1974), notă în care Adrian Rogoz face parcă un referat matematic, de o acuratețe comparabilă celei a textelor din orice revistă de referate matematice: „ F^c sînt mulțimile intermediare între cele ale numărabilului și ale continuului... Statutul paradoxal al domeniului F^c este evidențiat de situarea lui între ∞N și ∞C , din care rezultă că o mulțime infinită numărabilă are o putere inferioară oricărei mulțimi finite din sfera onticului. În ceea ce privește calculul informal, această expresie improprie (...) vrea să semnifice tocmai ansamblul procedeelelor de traducere a celor patru categorii de mulțimi (F , N , F^c și C) una în alta.“ Același autor face minuțioase evaluări de probabilități în „Altarul zeilor stochastici“, iar în același „Preț secant...“ (la pagina 263) spune: „Am fost legați, dacă vrei, ca termenii unei serii semiconvergente.“ Neobișnuită comparație! O noțiune matematică, inaccesibilă în principiu publicului larg, este luată ca termen lămuritor, deosebit de expresiv, în raport cu o relație umană!

Intr-o povestire publicată în *Almanahul Știință și Tehnică '80*, matematicianul mecanician (doctor docent) Viorel Visarion neagă riguros o propoziție-conjuncție și asta nu cu scopuri decorative, ci ca o cheie efectivă a misterelor acumulate în anume împrejurări în jurul eroului.

În volumul colectiv *Întîmplări din secolul XXI* (Edit. Scrisul Românesc, Craiova, 1974), (profesorul de matematică) Alexandru Mironov are o povestire („Din cronica anului 2000. Matematica — a doua limbă maternă“) din care nu mă pot opri să nu citez cîteva fraze: „...Cum cu justificată mîndrie arată zierele vremii, s-a ajuns la noi la un număr de 55 de matematicieni pe kilometrul pătrat (adică peste 48% din populația țării) ceea ce situează țara noastră pe unul din primele locuri în lume, știut fiind că în clasamentele progresului locurile se obțin în funcție de cantitatea de materie cenușie superioară (deci creiere de matematicieni) pe care societatea respectivă o posedă.

Matematicienii s-au amestecat în toate domeniile...“

Și, precum se vede în volumul craiovean, nu în ultimul rând, sau cu rezultate mai puțin benefice, în literatura SF...

De fapt, reminiscență poate a întemeierii grecești a lumii prin numere, figuri și corpuri geometrice, obiectele matematice sînt adevărate obiecte de cult pentru literatura SF. Banda lui Moebius, sticla lui Klein, sferile, mai mult sau mai puțin misterioase, mai mult sau mai puțin pămîntene, hiperbolele și hiperbolozii, pătratele — magice sau nu — formule și ecuații (chiar și ale „esenței umane” la Romulus Bărbulescu și George Anania, „Ferma oamenilor de piatră”), numere, coduri, cuburi și hipercuburi, spații și hiperspații, construcții geometrice de tot felul și multe altele sînt elemente de recuzită pentru cele mai variate tipuri de producții SF. Deoarece teoria relativității este aproape în exclusivitate o geometrie a spațiului și timpului, tot ca furnizate de matematică pot fi considerate și mult implicatele paradoxuri spațio-temporale, adevărat izvor de idei SF.

Despre paradoxurile care apar în povestirile SF ar merita să vorbim mai mult. Fără a epuiza subiectul aici, voi face numai cîteva referiri la o clasificare a paradoxurilor pe care o făcea undeva profesorul Solomon Marcus. Astfel, el distingea între paradoxurile logice propriu-zise (negarea principiului necontradicției — o propoziție nu poate fi simultan adevărată și falsă — și negarea principiului tertului exclus — o propoziție nu poate fi decît sau adevărată sau falsă) și paradoxurile care apar prin contradicția dintre un rezultat nou, neobișnuit, și intuiția curentă sau opiniile științifice existente la un moment dat, sau situațiile paradoxale pentru că nu pot fi explicate pe baza a ceea ce se cunoaște la un moment dat („împietirea” inelelor lui Saturn, așa cum este ea dezvăluită de recente fotografii ale stațiilor automate americane, a fost un asemenea paradox pînă ce fotografii ulterioare au permis explicarea fenomenului în termeni gravitaționali). În sfîrșit, uneori sînt calificate ca paradoxuri rezultate bazate pe erori ascunse de raționament, deci unele sofisme mai subtile și mai șocante.

Privind această tipologie, întreaga literatură SF apare ca paradoxală. Prin înseși trăsăturile sale fundamentale,

pentru că este S și, mai ales, pentru că este F, literatura SF intră într-un anume sens în contradicție cu „intuiția curentă și cu opiniile științifice existente la un moment dat”, deci conduce la construirea de lumi paradoxale în raport cu lumea așa cum este ea, cu lumea literaturii „realiste”. La interferența acestor lumi SF cu lumea „noastră” apar cele mai insolite situații paradoxale (să ne gîndim, de exemplu, la șirul de întîmplări din „O singură greșeală” de Ov.S. Crohmălniceanu, sau la alte povestiri din același volum cu titlu anunțînd paradoxuri: *Istории insolite*), dar și cele mai suculente pagini de umor SF (imi vine în minte Isaac Asimov, cu cei doi pămînteni de sexe complementare, de la care o echipă de extrateresți, veniți în explorare dintr-o lume în care înmugurirea este modul de înmulțire a localnicilor, încearcă să afle cum se înmulțesc oamenii...).

Un interesant paradox moralizator ne propune Gheorghe Săsărman în „falsul său tratat de urbogonie” cu titlu plăcut mie: *Cuadratura cercului* (Editura Dacia, Cluj-Napoca, 1975). În *Protopolis* știința și tehnica ajung atît de dezvoltate încît orașul poate fi acoperit cu o cupolă de plastic sub care totul este automatizat, chimizat, rezolvat științific. Printr-o evoluție (involuție) perfect logică a evenimentelor, oamenii din Protopolis regresează continuu pînă ce ajung proto-oameni. Povestirea se încheie cu fraza: „Iar la bursa pariurilor, cota de departe cea mai ridicată o înregistra întrebarea-pronostic: Cînd va începe să le crească protopoliților coada?”

Nu este deloc mai greu de dat exemple de paradoxuri logice propriu-zise intrate în trama unor producții SF. În volumul *...dintr-o lume congelată și... false ficțiuni* (Editura Albatros, București, 1980), Romulus Dinu include o serie de povestiri bazate pe dilemele juridice delicate pe care le ridică congelarea în azot, cu întîmplări legate de personaje cu viața suspendată astfel, personaje în viață, dar care nu sînt în viață, dar care nu sînt nici decedate, a căror avere ar trebui predată moștenitorilor, dar n-ar trebui predată moștenitorilor etc. „Cazul G.D. Hearth” conține un asemenea paradox contrapunctat cu un paradox logic (mitologic)

prezentat la subsol: Un filozof, pe nume Koron, se angajează să-l învețe pe un tânăr tot ce știe el în arta retoricii în așa fel încât acesta să poată câștiga primul său proces public (plata lecțiilor era condiționată de câștigarea procesului). Tânărul, demn discipol al filozofului, învață tot ce poate învăța de la magistru și apoi îl dă în judecată pe motiv că acesta nu l-a învățat tot ce știa el, deci nu merită să i se plătească lecțiile...

Prezența matematicianului și a matematicii sale este atît de mult exploatată în producțiile SF, încît M. Oprîță se ocupă copios de matematicianul Vlig, unul dintre cei trei frați Vlig, în acida parodie *Argonautica* (Editura Dacia, Cluj-Napoca, 1980), riscînd chiar o jumătate de pagină de voit barbare calcule matematice simbolice.

Influența inversă, dinspre literatura SF spre matematică, este mult mai subtilă și mult mai greu de exemplificat la modul anecdotic. Ea este însă suficient de importantă și demonstrarea acestei afirmații este de prisos, dovedit fiind rolul educativ al literaturii SF în perspectiva efervescenței științifice pe care prezentul o trăiește și viitorul o presupune. Literatura SF este, poate, cel mai eficient mijloc de pregătire a tinerelor generații (și nu numai a acestora) pentru a face față „șocului științific al viitorului“, după cum se exprima Ion Hobana la o întâlnire cu tineri cititori bucureșteni, parafrazînd titlul cunoscutei cărți a lui Alvin Toffler. Iar matematica a dat naștere la multe „unde de șoc“ (geometriile neeuclidiene, existența problemelor nedecidabile algoritmice, imposibilitatea formalizării complete și consistente a aritmeticii, consistența matematicii cu și fără ipoteza continuului, existența problemelor care nu pot fi rezolvate fără participarea esențială a calculatorului etc.) și sigur va sili și în viitor cunoașterea umană să-și mute frontierele, să inverseze unele perspective, să accepte rezultate tulburătoare din puncte de vedere tradiționale. Formarea oamenilor care să găsească și să integreze aceste rezultate în filozofia zilnică este o sarcină de care literatura SF se achită cu un succes și cu o competență indiscutabile. În plus, la modul concret, să ne gîndim la reîntoarcerea în beneficiul matema-

ticii a elementelor matematice folosite în recuzita SF, a spiritului matematic însuși: numărul cititorilor cărții lui Ov. S. Crohmălniceanu este mult mai mare decît cel al cititorilor cărților de teoria grafurilor care conțin referiri la problema celor patru culori. O informație matematică greu accesibilă altfel publicului larg este „servită“ la modul incîntător (deci cu atît mai eficace) de o povestire SF.

Dir ecția cea mai consistentă pe care ar trebui să se dezvolte paralela dintre matematică și literatura SF este însă aceea a caracterizării în conjugare a „gramaticilor“ celor două domenii. Punctul de plecare al acestei afirmații este observația că atît producțiile matematice (teoremele) cît și cele SF (povestirile, de exemplu) au ca principală „regulă generativă“ *silogismul*. În matematică, silogismul este prezent în forma sa propriu-zisă, riguroasă, ca prelungire prin tranzitivitate a implicațiilor și echivalențelor. Rezervînd pentru aceste raționamente termenul de silogism, poate că ar fi mai bine să vorbim despre *sofisme* la nivelul literaturii SF și nu despre silogisme, deși, de multe ori, corectitudinea formală a lanțurilor de deducții din povestirile SF este de netăgăduit. Ignorînd raționamentele SF (voit sau nu) defectuoase din punct de vedere logic, rămîn totuși surprinzător de multe raționamente corecte. (Nu voi da aici exemple; Capitolul IV al cărții lui Fl. Manolescu, intitulat chiar „Silogismul SF“, prezintă probe deosebit de sugestive din numeroși autori.) De unde provine atunci caracterul fantastic (= nerealist, deci neadevărat) al acestor raționamente? Răspunsul la întrebare este legat de observația cumva paradoxală că, de cele mai multe ori, raționamentele SF sînt cu atît mai „corecte“ cu cît contextul lor este mai fantastic. Paradoxul este numai aparent și acest lucru este transparent dacă ne gîndim la alcătuirea producțiilor SF în care el poate fi sesizat. Într-adevăr, ce poate fi, de pildă, mai fantastic decît existența lumilor paralele? Povestirile cu o asemenea temă sînt însă de cele mai multe ori perfect logice. Imediat ce acceptăm premisa existenței unei asemenea lumi, toate consecințele inferate corect pe această bază, oricît ar fi ele de fantastice în raport cu universul realului, sînt

adevărate în raport cu universul povestirii respective. Observația ne trimite cu gândul la afirmația din logica matematică cum că „falsul implică orice”, sau, mai adecvat, la acea „definiție” a lui Bertrand Russell pe care o aminteam în secțiunea a 2-a: „matematica este acel domeniu în care se raționează corect cu enunțuri despre care nu se știe niciodată dacă sînt sau nu adevărate.” În literatura SF se raționează corect cu enunțuri care sînt considerate adevărate, dar, de foarte multe ori, ele nu sînt nici măcar plauzibile! Din acest punct de vedere, matematicianul este cumva mai onest decît autorul SF. Acesta din urmă nu numai că încearcă să acrediteze ca adevărate (artistic, dar și logic) ipotezele sale, dar de cele mai multe ori reușește chiar să-l convingă (cel puțin la nivelul trăirii artistice) pe cititor de adevărul lumilor bazate pe aceste ipoteze.

În legătură cu subterfugiile de persuadare a cititorului, de acreditare ca adevărați a parametrilor unor lumi imaginare, trebuie să facem distincția între raționamentele ce încearcă explicarea principală a acestor lumi, însăși existența și alcătuirea lor într-un anume chip, și raționamentele legate de evenimentele ce se petrec într-o asemenea lume, după ce întemeierea ei este acceptată. În contextul primei categorii putem distinge mai multe tehnici de introducere a fantasticului, de trecere de la adevărul real la cel SF. Iată cîteva asemenea posibilități, fără intenția de a epuiza clasificarea lor: 1) *tehnica progresiei* (într-un raționament lung, cu baza într-un fapt real, se strecoară exagerări minore care însumînduse asigură saltul în fantastic), 2) *tehnica falsului izomorfism* (se pleacă de la paralela dintre obiectele ce participă la un proces real și, pe baza unor caracteristici comune acestor obiecte cu obiecte de altă natură, se trage concluzia că procesul este posibil și pentru obiectele din a doua categorie; să ne gândim la paralela dintre un organism uman și un ceas la Edmond About, „Omul cu urechea ruptă”), 3) *tehnica pledoariei* (se aglomerează fapte prezentate ca reale și care fac necesară o anume concluzie pe care chiar cititorul ajunge să o tragă, senzația de „real” fiind astfel și mai puternică, 4) *tehnica „singurei explicații”* (se prezintă fapte neobișnuite,

înexplicabile, și apoi se dă „singura” explicație care poate exista; indiferent de gradul ei de fantastic, această explicație rămîne astfel ca adevărată. A se vedea, de pildă, „Experimentul” lui V. Visarion), 5) *tehnica visului/nebuniei* (se prezintă faptele, apoi se pun pe seama unei minți rătăcite într-un fel sau altul, refuzînd astfel explicația, deci raționamentul propriu-zis; este explicată însăși povestirea nu evenimentele, 6) *tehnica inimaginabilului imaginabil* (deoarece Cosmosul, lumile paralele și viitorul îndepărtat sînt în mare măsură inaccesibile deci incontrollabile, în aceste zone totul este posibil și nu trebuie să ne mire că este așa, raționamentele „pămîntene”-neputînd fi impuse acelor lumi), 7) *tehnica premisei convenite* (de tipul lui „ce-ar fi dacă...” aflat la baza unor povestiri de Al. Beleaev), 8) *tehnica ignorării premisei* (se dezvoltă narațiunea evitînd chestionarea ipotezelor; procedeul pare a fi foarte apreciat în ultima vreme). Exemple foarte sugestive pentru multe din variantele anterioare pot fi găsite în capitolul despre silogismul SF, al cărții lui Fl. Manolescu. Evident, sînt posibile noi distincții și sînt necesare noi investigații (poate deja întreprinse în alte părți) asupra procedeelor logice și stilistice de trecere din real în fantastic în așa fel încît caracterul științific al narațiunii să nu se piardă.

De altfel, ținînd seama de rigoarea formală a genului SF (la nivelul silogismelor sale), probabil că este profitabil de încercat utilizarea matematicii chiar în investigarea producțiilor SF (așa cum, cu rezultate încurajatoare, s-au utilizat modele matematice în studiul romanelor polițiste, al operelor dramatice și chiar al poeziilor). De exemplu, dacă pentru abordarea raționamentelor corecte (atît matematice, cît și SF), logica matematică este un instrument adecvat, necesar chiar, pentru sofismele SF, de orice tip ar fi ele, vor fi probabil necesare modele ad-hoc, modele care să dea seama de procedeele prin care se poate „trișa”, făcînd plauzibil un raționament defectuos.

În legătură cu modelele matematice, voi remarca faptul pîcant că la pagina 31 a cărții lui Fl. Manolescu, urmînd o idee a lui Jacques van Herp, se prezintă deja un mic model

cu ajutorul căruia se lămurește diferența dintre un „roman de ipoteză“, un „roman fantastic“ și un „roman SF“.

Subsemnatul, mai mult decît increzător în valențele matematice, aștept optimist viitoarele modele, instrumente în slujba literaturii și criticii SF. De fapt, literatura SF ar trebui să intre nu numai în conștiința criticii și istoriei literaturii, ci și în conștiința matematicienilor și astfel în preocupările lor (preocupări matematice sau literare...). De altfel, colaborarea dintre matematică și literatura SF este vizibilă încă înainte de a deschide cartea lui Fl. Manolescu, adică chiar de pe coperta ei. Mihai Jalobeanu, autorul desenului de calculator care ilustrează coperta este un tînăr matematician clujean, doctor în matematici încă din 1976 și cu certe reușite ciber-artistice.

6. O TEOREMĂ CU DEMONSTRAȚIA ÎN LIMBA ROMÂNĂ: TEOREMA DE IMPOSIBILITATE A AGREGĂRII INDICATORILOR

Modul de a fi al matematicii este rigoarea, iar forma (principală) de expresie a rigorii este formalismul simbolic. Operînd corect cu simboluri precis definite se obțin expresii, dacă nu neapărat adevărate (astă depinde de premisele considerate), cel puțin neambigue, cu o semnificație precisă, excluzînd interpretările alternative. Și în cuvinte se poate realiza rigoarea, dar de regulă cu eforturi mult mai mari și cu pericolele pe care sinonimia, omonimia, ambiguitatea și caracterul vag al unor sintagme le implică. De exemplu, dacă ne referim la două valori, a și b , relația dintre ele poate fi prinsă în una din următoarele propoziții: „ a este egal cu b “, „ a este strict mai mic decît b “, „ a este mai mic sau cel mult egal cu b “, „ a este strict mai mare decît b “ și „ a este mai mare sau egal cu b “. Cu excepția primei propoziții, niciuna dintre celelalte nu este folosită frecvent în vorbirea curentă. Se spune „ a este mai mare decît b “ fără a se mai distinge între cele două situații care pot apare. Cînd scriem însă în simbo-

luri, sîntem obligați să alegem unul și numai unul dintre semnele $=$, $<$, $\leq$, $>$, $\geq$ și astfel se elimină posibilitatea de neînțelegere.

Nu vreau să fac aici apologia formalismului simbolic. El este întotdeauna util, de multe ori chiar indispensabil, singur este adesea greu de citit, dar uneori poate fi chiar înlocuit cu exprimarea verbală. Un asemenea exemplu de „matematică vorbită“ va fi prezentat în continuare. Subliniez, ceea ce urmează rămîne în mare măsură matematică chiar dacă procentul de simboluri abstracte folosite va fi foarte mic. După cum spunea R.W. Hamming (vezi citatul din prima secțiune a lucrării), matematica este instrumentul nostru pentru a raționa corect. Gîndirea matematică poate fi deci prezentă și în scrieri în proză (chiar și în versuri, ne învață Ion Barbu). În volumul *Știință și umanism* există un articol intitulat „Vorbe de duh și calculatoare“ în care Gr. C. Moisil face un studiu structural, generativ, al glumelor de diferite tipuri. Așa cum sublinia profesorul Solomon Marcus la o comemorare a lui Moisil, acel articol, deși subiectul pare a nu sugera acest lucru, este un articol impregnat cu matematică, ba mai mult, poate chiar inspira o teză de doctorat cu tema studiului matematic al anecdotelor...

Teorema pe care am anunțat-o în titlu și pe care o voi prezenta mai jos se referă tot la probleme de agregare a unor entități din domeniul socialului precum teorema lui Arrow și, la fel ca aceasta, indică o „cale închisă“. Pe scurt, ea spune că nu se pot construi indicatori agregați „buni“ (calitatea este definită prin trei condiții, fiecare în parte simplă, puțin restrictivă, anodină...).

Voi trece peste precizarea noțiunii de indicator. Numărul de frigider la mia de locuitori, veniturile medii ale unei gospodării, numărul de pantofi bărbătești vînduți într-un an, sînt toți indicatori care se referă la nivelul de trai al unui popor. Evident, sînt mulți alți indicatori care concurează la precizarea nivelului de trai. Toți cei trei de mai sus sînt de tip pozitiv, adică este bine să fie cît mai mari, valori mari ale lor indică situații mai bune. Există și indicatori negativi; numărul de bolnavi de gripă este un exemplu.

Ce ne facem? Noțiunea de nivel de trai, mai general, cea de calitate a vieții, pare a fi sprijinită de o mulțime foarte mare de indicatori dintre care nu avem motive să-l alegem pe unul singur ca reprezentant. Cum am putea construi un unic indicator de calitate a vieții, deci cum se pot agrega indicatorii primari puși în evidență la un moment dat? Ar fi foarte util să putem face acest lucru. Din păcate însă, nu se pot obține agregări „bune”. Este ceea ce voi demonstra în continuare.

Alegerea vorbelor pentru demonstrație nu are doar scopul de a face citibile rîndurile următoare, ci și pe acela de a evita precizia exagerată în legătură cu manipularea unor entități care „nu suportă zecimalele”, cum sînt cele din domeniul social. Într-adevăr, pe principiul că „norii nu se măsoară cu șublerul”, este nevoie de instrumente nuanțate, graduale, care să permită raționamente precise cu entități avînd margini imprecise. Această nevoie este acut resimțită în domeniul social, dar a fost formulată imperios și cu referire la științele economice. Așa se explică, de pildă, succesul considerabil pe care l-au înregistrat mulțimile fuzzy (într-o traducere... vagă s-a încetățenit în limba română sintagma „mulțimi vagi”).

În cele ce urmează voi folosi o asemenea logică vagă cu ajutorul căreia voi formula și demonstra teorema.

Ce condiții ne așteptăm să îndeplinească o agregare, ce proprietăți trebuie să aibă o procedură de agregare?

În primul rînd, prin agregare trebuie să obținem un indicator care să sesizeze modificările indicatorilor inițiali, în orice caz, dacă un indicator inițial pozitiv crește, atunci indicatorul agregat nu trebuie cumva să scadă, iar dacă indicatorul inițial scade, cel agregat nu trebuie să crească. Spunem că indicatorul agregat este *sensibil*. Pe de altă parte, dacă un indicator inițial se modifică puțin, atunci indicatorul agregat nu trebuie să se modifice mult. (Creșterea retribuției cu doi lei, de exemplu, nu poate avea o influență mare asupra calității vieții.) Spunem că indicatorul agregat trebuie să fie *anti-catastrofic*. (Catastrofismul este înțeles

în sensul teoriei catastrofelor despre care voi vorbi mai târziu, și anume i se spune catastrofică unei variabile care face salturi mari atunci cînd un parametru se modifică puțin.) În sfîrșit, indicatorul agregat n-ar trebui să fie *compensator*, adică dacă un indicator inițial se modifică foarte mult, atunci această modificare nu trebuie să fie compensată de un alt indicator astfel încît indicatorul agregat să echivaleze două situații care sînt de fapt excesiv diferite.

Cele trei condiții par într-adevăr a fi minimale pentru orice indicator agregat, ba mai mult, mulți indicatori reali au fost criticați pentru că nu respectă una sau alta dintre ele.

Dar, de fapt, nici nu există un indicator agregat care să fie simultan sensibil, anti-catastrofic și necompensator!

Iată raționamentul care conduce la această afirmație. El se bazează pe utilizarea riguroasă a termenilor neriguroși: *mic*, *semnificativ*, *mare*, *foarte mare*, cei cu ajutorul cărora au fost definite condițiile anterioare. Înțelesul acestor termeni este cel uzual și nu voi face apel decît la faptul că un număr *mic* este mai mic decît unul *semnificativ* și la alte truisme de acest gen.

Să presupunem că avem un indicator agregat obținut prin sintetizarea a doi indicatori inițiali pozitivi (cazul cînd unul sau amîndoi indicatorii inițiali sînt de tip negativ este analog). Să presupunem că indicatorul agregat respectă toate cele trei condiții. Pornim adică un raționament prin *reducere la absurd*, în speranța că, într-adevăr, vom ajunge la o contradicție cu ipoteza făcută. Pentru fiecare indicator inițial că considerăm cîte două valori suficient de îndepărtate pentru ca diferența lor să fie *foarte mare*. Obținem patru perechi de valori

(*mic*, *mic*), (*mic*, *foarte mare*), (*foarte mare*, *mic*),
(*foarte mare*, *foarte mare*)

pe prima componentă fiind valoarea primului indicator, iar pe a doua componentă valoarea celui de-al doilea. Indicatorul agregat asociază cîte o valoare agregată fiecărei perechi. Să ne gîndim la valorile intermediare, cele pentru (*mic*, *foarte mare*) și (*foarte mare*, *mic*) (ele sînt intermediare



pentru că indicatorul agregat este sensibil). Indicatorul agregat este necompensator, deci aceste două valori trebuie să fie *semnificativ* diferite. Să presupunem că valoarea agregată din punctul (*mic, foarte mare*) este (*semnificativ*) mai mare decât cea pentru (*foarte mare, mic*). Fiind sensibil, indicatorul agregat va crește de la valoarea pentru (*mic, mic*) până la valoarea pentru (*mic, foarte mare*), trecind însă pe lângă valoarea pentru (*foarte mare, mic*) (vezi figura 6.1).

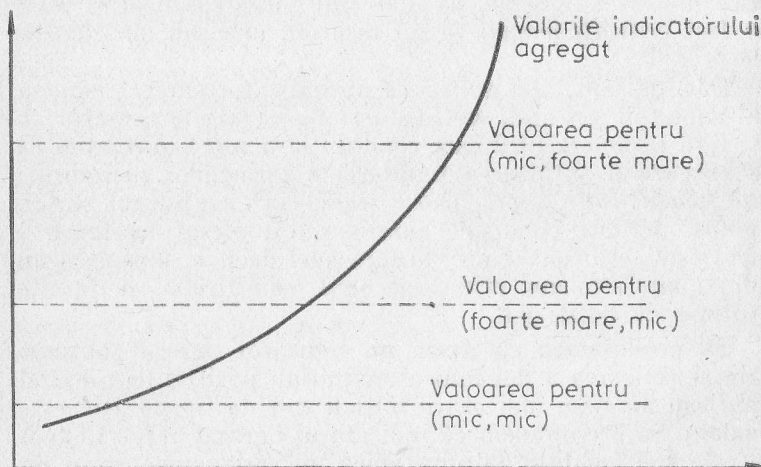


Fig. 6.1.

Această trecere „pe lângă” trebuie să se facă suficient de aproape, deoarece indicatorul agregat este anti-catastrofic, el nu poate sări *mult*. Prin urmare, trebuie să existe o valoare, s-o notăm cu *val*, a celui de-al doilea indicator inițial, astfel încât valoarea indicatorului agregat pentru situația (*mic, val*) să fie apropiată de valoarea pentru (*foarte mare, mic*). Acest lucru contrazice caracterul necompensator al indicatorului agregat. Am obținut contradicția dorită, deci presupunerea că ar exista un indicator agregat simultan sensibil, anti-catastrofic și necompensator nu este corectă.

Evident, discuția anterioară nu are pretenția că este o demonstrație în adevăratul sens al cuvântului. Ea prezintă însă suficient de clar și de intuitiv ideea unei demonstrații riguroase care nu mai are nevoie de un simbolism prea exagerat pentru a deveni matematică. O asemenea demonstrație trebuie neapărat să considere indicatorii ca funcții și să folosească notații funcționale care vor clarifica unele dintre frazele anterioare, destul de prolixă din cauza ambiției de a nu folosi simboluri matematice (în afara parantezelor și a unei figuri neriguroase).

Am discutat până acum numai despre forma demonstrației anterioare. Să subliniem însă și fondul ei, cumva negativist, cel puțin la prima vedere. Teorema (demonstrată riguros în termeni de mulțimi fuzzy) indică o nouă limită a instrumentelor matematice, aceea a imposibilității de a agrega indicatori sociali astfel încât rezultatul să fie „bun” (în sensul condițiilor discutate). În domeniul social nu se pot face agregări decât cu rezerva slăbiciunilor la care asemenea agregări ne conduc. Entitățile sociale multidimensionale nu pot fi abordate pertinent decât prin sisteme de indicatori de asemenea multidimensionali.

Ca o consecință a acestui fapt și a observației că sistemele multidimensionale de parametri nu pot fi comparate în mod realist (lucru evident posibil atunci când reușim agregarea până la un unic parametru), se obține afirmația că în domeniul social nu se pot face *comparări* realiste, relevante. Deoarece calitatea vieții este o entitate supra-multidimensională, rezultă că nu putem face ierarhii după nivelul de calitate a vieții. Altfel spus, fericirea este o chestiune personală, un papuaș poate fi la fel de fericit ca și un eschimos, deși hrana, condițiile de locuit, îmbrăcămintea, sporturile practicate, numărul de frigider la mia de locuitori și alți mulți indicatori pot avea valori foarte diferite pentru cei doi subiecți. Formulând teorema sub forma „orice indicator agregat care este sensibil și anti-catastrofic este compensator” și observând că în domeniul social toți indicatorii cunoscuți (și imaginabili) sînt sensibili și anti-catastrofici (nu pare firesc să sacrificăm aceste cerințe fundamentale) ajungem la

concluzia că „orice indicator social agregat este compensator“. Afirmatia poate părea banală, fiind ilustrată de toți indicatorii agregați care există, dar banalitatea este adesea o piedică în calea cunoașterii (Y. Friedman). Multe adevăruri fundamentale sînt banalizate tocmai de omniprezența lor care ne împiedică să vedem ce se ascunde sub aparența unei realități arhicunoscute (la suprafață) și să aflăm *de ce* arată așa și nu altfel această realitate.

Discuția riscă să se îndepărteze de subiect și sînt convins că cititorul abia așteaptă să afle ce este cu teoremele lui Gödel... (Iată una dintre frazele cele mai optimiste ale cărții...)

7. FORMALIZAREA ARITMETICII ESTE INEVITABIL INCOMPLETĂ: TEOREMELE LUI GÖDEL

Aritmetica este clar o parte a matematicii; iar prin formalizare, de cele mai multe ori, înțelegem *matematizare*. Care este atunci problema, trebuie să matematizăm o parte a matematicii?! Într-un anume sens, chiar așa! Prin formalizare se înțelege însă mai mult decît matematizare pur și simplu și anume, matematizare cu anumite proprietăți. Mai exact, este vorba de *axiomatizarea* aritmeticii, de construirea unui sistem formal care să modeleze aritmetica.

Pentru a lămurii noțiunea de sistem formal, să ne gîndim la *Elementele* lui Euclid, cel care acum douăzeci și trei de secole a fundamentat axiomatic geometria elementară într-un mod care a rămas etalon de rigoare pînă astăzi (tradusă în 300 de limbi, cartea lui Euclid pare a fi cea mai citită din lume). Pus să redacteze un manual de geometrie și dorind să-și ferească opera de abilitatea distructivă a sofistilor contemporani, cei care erau în stare să demonstreze oratoric și o teză și contrariul ei, Euclid a dedus toate propozițiile care se puteau deduce în geometrie, punînd sub semnul întrebării orice afirmație. În acest context, o propoziție nu avea decît două șanse: sau să poată fi dedusă pe baza altora, sau să

fie independentă, elementară, primară. Telul (și reușita) lui Euclid a fost reducerea la minim a acestor propoziții primare și alegerea unor asemenea propoziții, cît mai simple și mai „evidente“ cu putință. Le-a denumit axiome (zece în total, cinci numite idei comune și cinci postulate). În lista axiomelor a inclus atît premise „vizibile“, cum ar fi „două mărimi egale cu o a treia mărime sînt egale între ele“, „între două puncte distincte de pe o dreaptă există un al treilea punct“, „întregul este mai mare decît partea“, dar și afirmații care ulterior au dat mare bătaie de cap matematicienilor, așa cum a fost postulatul al cincilea, cel al paralelelor („două drepte se întîlnesc de acea parte, față de care, tăiate de o secantă, formează unghiuri a căror sumă este mai mică decît două unghiuri drepte“). Plecînd de la aceste axiome, prin raționamente logice, Euclid demonstrează 465 de teoreme ale geometriei.

Acesta este un sistem formal. Între timp, formalizarea a progresat continuu, mai ales pe linia eliminării continue a intuiției, după cum observa filozoful belgian Jean Landrière, ajungîndu-se la înțelesul actual al sistemelor formale, cu o natură preponderent sintactică. Astfel, astăzi, printr-un sistem formal se înțelege o teorie deductivă constituită dintr-un *vocabular* (o listă de simboluri abstracte cărora nu este obligatoriu să li se precizeze apriori semnificațiile, deși ele au semnificații), o serie de reguli de formare a unor *formule corecte* (șiruri corecte de simboluri din vocabular), o mulțime de *axiome* (formule pe care le considerăm adevărate, fără a ne interesa realizarea fizică a acestui adevăr) și o mulțime de *reguli de deducție*. Cu ajutorul acestor reguli se construiesc *demonstrații*, adică șiruri de formule, plecînd de la axiome. Ultimul rînd dintr-o demonstrație este o *teoremă*. Plecînd de la axiome „adevărate“ și folosind corect regulile de deducție, „adevărul“ se conservă, se transmite teoremelor. Teoremele sînt astfel adevărate.

Pentru a merge mai departe, să considerăm un exemplu concret, *Elementele* lui Euclid fiind totuși greu accesibile (la propriu). Să ne gîndim la un sistem axiomatic pentru aritmetică. Ce ar trebui să facă un asemenea sistem?

Evident, el ar trebui să „prindă” obiectele cu care lucrează aritmetica, adică numerele, și în primul rînd, numerele naturale 0, 1, 2, ... Apoi, pentru a „funcționa” cum trebuie, sistemul respectiv ar trebui să modeleze operațiile elementare cu numere, adunarea și înmulțirea în primul rînd. Iar un asemenea sistem este cu atît mai interesant cu cît are un număr mai mic de axiome și de simboluri în vocabular.

Leopold Kronecker spunea că „Dumnezeu a creat numerele naturale; restul este opera omului”. De fapt, i se poate răpi lui Dumnezeu chiar și meritul de a fi creat numerele naturale: ele pot fi recreate de om preluînd de la Dumnezeu numai numărul zero. Iată cum: considerăm vocabularul format din simbolurile 0, +, ·, '. Pentru a ști despre cine vorbim — și numai pentru aceasta, deocamdată! — să numim aceste simboluri: *zero*, *plus*, *înmulțit*, *succesor*. Funcționarea acestor simboluri în cadrul sistemului pe care îl construim va corespunde înțelesului uzual al acestor cuvinte, prin aceste înțelesuri, formulele și teoremele construite vor căpăta semnificații pentru aritmetica așa cum o știm din școala generală, dar, repet, în cadrul sistemului formal nu ne interesează interpretările.

Iată și un set de axiome care leagă între ele simbolurile precizate (axiomele lui Peano pentru aritmetica numerelor naturale):

A1. Pentru nici un număr m nu avem $m' = 0$ (zero nu este succesorul nici unui număr);

De fapt, cînd scriem „ m ” facem un abuz de notație, m nu face parte din sistemul axiomatic, așa cum cuvintele „Pentru”, „nici”, „un” etc., nu fac parte din el. Cuvintele și scrierea zecimală a numerelor aparțin metalimbajului cu ajutorul căruia precizăm elementele sistemului formal. În realitate, m este o notație pentru „al m -lea succesor al lui 0”, deoarece succesorul la asta folosește: la generarea numerelor naturale ($0' = 1$, $0'' = 2$, ..., $0''' \dots' = m$, cu m apariții ale semnului ' etc.).

A2. Pentru toți m și n , dacă $m' = n'$, atunci $m = n$ (numere diferite au succesori diferiți).

A3. Pentru orice m avem $m + 0 = m$.

A4. Pentru orice m și n avem $m + n' = (m + n)'$.

A5. Pentru orice m avem $m \cdot 0 = 0$.

A6. Pentru orice m și n avem $m \cdot n' = (m \cdot n) + m$.

Axiomele A2 — A6 precizează cîteva proprietăți elementare ale operațiilor de adunare și înmulțire. Trebuie să mai indicăm și modul de articulare a sistemului, regulile lui de deducție prin care, plecînd de la axiomele anterioare, putem ajunge la teoreme. În acest scop luăm în considerare logica elementară, cea care ne învață cum să operăm cu propoziții făcînd conjuncții (p „și” q), disjuncții (p „sau” q) sau negări de propoziții („non” p), cum să lucrăm cu predicate cuantificate. (Să notăm cu A proprietatea unui triunghi de a fi echilateral și cu B proprietatea unui triunghi de a fi isoscel. Pentru un triunghi precizat, t , scriem $A(t)$ și înțelegem că am prescurtat expresia „triunghiul t este echilateral”. Acesta este un predicat. Teorema „orice triunghi echilateral este isoscel” se scrie atunci sub forma $(\forall t)A(t) \rightarrow B(t)$. Avem o formulă de calculul predicatelor cuantificată universal: $\forall t$ se citește „oricare ar fi t ”. Analog, $(\exists t)B(t) \wedge \bar{A}(t)$ înseamnă „există un triunghi t astfel încît t este isoscel și ($\wedge$) nu ($\neg$) este echilateral”. Avem o formulă în care apare cuantificatorul existențial: $\exists t$ se citește „există t ”.)

La axiomele anterioare adăugăm încă una, formalizînd principiul inducției complete:

A7. Pentru orice predicat $H(k)$, dacă avem $H(0)$ și dacă pentru orice m , $H(m)$ implică $H(m')$, atunci avem $H(n)$ pentru orice n .

Se știe că toate raționamentele din teoria numerelor naturale, cu excepția celor care apelează la analiză, pot fi efectuate în cadrul sistemului anterior. Să notăm acest sistem cu Z , pentru a ușura referirea la el.

Evident, un sistem formal nu este suficient să existe, ci trebuie să mai îndeplinească și unele condiții de „bună alcătuire”. De exemplu, nu putem admite ca pentru o formulă oarecare (o afirmație) să fie teoreme atît ea cît și negația ei (atît afirmația cît și negația ei să fie adevărate). Numim această cerință *principiul necontradicției*. În viața de toate

zilele acest lucru este uneori banal: azi ori este miercuri, ori nu este miercuri, un triunghi este sau isoscel sau nu este isoscel. El trebuie să fie valabil și în sistemul formal. Există însă propoziții de genul „eu acum mint“, „această frază este neadevărată“ etc. care ne pun în încurcătură; ele nu sînt nici adevărate, nici false, nici ne-adevărate, nici ne-false. Cu atît mai mult principiul necontradicției trebuie impus pentru sistemele formale.

Paradoxurile anterioare sugerează o nouă cerință și anume aceea ca dîndu-se o formulă oarecare, sau ea sau negația ei să fie teoremă (ori afirmația, ori negația ei este adevărată). În acest caz spunem că sistemul este *complet*.

În concluzie, spunem că am *formalizat* un domeniu matematic (aritmetica, de exemplu) dacă am construit un sistem formal *complet* și *necontradictoriu* care modelează acest domeniu (obiectele și adevărurile domeniului se regăsesc în sistem, printre obiectele și teoremele acestuia).

Problema formalizării aritmeticii numerelor naturale (trecerea la aritmetica numerelor reale nemaifiind apoi o problemă), în general, problema formalizării matematicii, a fost o preocupare majoră a matematicienilor în ultimele decenii ale secolului al XIX-lea și primele decenii ale secolului nostru. Cîteva repere semnificative sînt publicarea în 1899 a *Fundamentelor geometriei*, în care David Hilbert reușește formalizarea geometriei, axiomatizarea teoriei mulțimilor de către Ernst Zermelo, ale cărui axiome au fost apoi modificate de către Fraenkel, publicarea în 1910 a cărții fundamentale *Principia Mathematica* de către B. Russell și A.N. Whitehead. În 1900, David Hilbert formula explicit la Congresul Internațional de Matematică de la Paris problema axiomatizării aritmeticii, iar în deceniile următoare, Hilbert și alți matematicieni au încercat zadarnic să realizeze acest lucru.

Programul lui Hilbert de construire a unei matematici sintactice, în cadrul căreia să se poată obține formal, mecanic, toate adevărurile matematicii intuitive, a fost zădărnicit în anul 1931, cînd Kurt Gödel își publică cele două teoreme de imposibilitate a formalizării aritmeticii. Născut în 1906, Gödel nu avea deci decît 25 de ani atunci cînd tul-

bura o întregă lume matematică și filozofică cu teoremele sale ajunse imediat celebre.

Iată aceste teoreme, într-o formulare verbală.

Teorema 1 a lui Gödel. Fie S un sistem formal care este sau egal cu sistemul Z anterior sau îl conține pe Z ca subsistem. (Sistemul formal S intenționează deci să formalizeze aritmetica numerelor naturale.) Atunci, dacă S este necontradictoriu, el nu este nici complet și nici nu poate fi completat (nu poate fi extins pînă la un suprasistem complet).

Demonstrația teoremei decurge în felul următor. Cu ajutorul unui predicat (predicatul „demonstrație“) și al unei funcții, Gödel reușește să vorbească în Z despre teoremele lui Z . Apoi el construiește o formulă din Z care spune despre ea însăși că nu este demonstrabilă în Z . Așadar, dacă formula este demonstrabilă, atunci ea nu este demonstrabilă; dacă ea este infirmabilă, atunci ea însăși va afirma că este demonstrabilă. În consecință, ea trebuie să fie indecidabilă în Z , deci Z nu poate fi complet.

Analogia cu paradoxul mincinosului este evidentă (semnalată și de către Gödel), dar formularea lui Gödel nu generează nici o contradicție, deoarece nu este necesar ca orice enunț din Z să fie sau demonstrabil sau infirmabil în Z .

Teorema întâi a lui Gödel are o serie de consecințe interesante:

a) Noțiunea de adevăr pentru sistemul însuși nu poate fi definită în Z sau într-un sistem care îl conține pe Z (Tarski).

b) Nu există un procedeu de decizie pentru a stabili care anume formule din Z (sau dintr-un suprasistem al lui Z) sînt demonstrabile, în cazul în care sistemul este consistent (Church).

c) Nu există un procedeu de decizie pentru a stabili care propoziții ale logicii elementare (cu sau fără identitate) sînt demonstrabile.

Teorema a 2-a a lui Gödel. Fie S sistemul Z sau un sistem care îl conține pe Z ca parte. Dacă S este necontradictoriu, atunci acest lucru nu poate fi demonstrat în S .

Demonstrația seamănă cu cea a primei teoreme, în sensul că se formulează ca un predicat în S afirmația non-contradicției lui S . Astfel, deși non-contradicția lui S poate fi formulată în cadrul aceluiași sistem, pentru a demonstra enunțul respectiv avem nevoie de un sistem mai tare decît S .

Programul lui Hilbert nu numai că n-a fost realizat, *Principia Mathematica* nu numai că a fost incompletă, dar, conform teoremelor lui Gödel, nici nu se putea realiza un asemenea program.

Într-un anume sens, teoremele lui Gödel indică o limitare imanentă a matematicii. Totuși, există unele direcții în care concluziile principal negative ale teoremelor lui Gödel pot fi depășite. De pildă, Wang Hao a dezvoltat un sistem logico-matematic suprapus, reuniune a unei succesiuni infinite de sisteme formale din ce în ce mai largi. În această piramidă infinită, non-contradicția sistemului de pe un nivel oarecare poate fi demonstrată în sistemul aflat cu două nivele mai sus. Gödel își punea problema demonstrării non-contradicției sistemului Z în cadrul sistemului Z însuși. Propozițiile nedecidabile pentru Gödel în sistemul Z devin astfel decidabile într-un sistem (suprasistem) superior.

Și astfel, „rezultatul final la care conduc considerațiile anterioare ne permit să conchidem că nici chiar dificultatea care, după toate aparențele, se credea a fi cea mai serioasă dintre toate cele pe care le-a întîlnit vreodată gîndirea matematică, nu a dus la veritabila «situație-limită». Dimpotrivă, renunțarea la anumite procedee de argumentare pe care le oferea în special gîndirea naivă nu a dus la o stare de resemnare, ci mai curînd la o aprofundare și rafinare a gîndirii” (O. Becker, op. cit., p. 152). Parcă nu rezultă totuși de aici că Oskar Becker pledează pentru „renunțarea la gîndirea naivă”, chiar dacă, la nivelul „naivității” lui Kurt Gödel, această gîndire ne duce la un anume fel de resemnare...

8. O PROBLEMĂ CELEBRĂ CU O REZOLVARE NEOBÎȘNITĂ: PROBLEMA CELOR PATRU CULORI

Istoria matematicii este istoria marilor probleme. Problemele geometrilor antici (inclusiv problema „demonstrării” postulatului al cincilea al lui Euclid) au contribuit enorm la dezvoltarea geometriei, problema lui Fermat motivează multe capitole ale algebrei, despre implicațiile celor 23 de probleme formulate de David Hilbert în 1900, la Congresul de matematică de la Paris stau măturie două volume consistente apărute de curînd sub egida Societății Americane de Matematică (unora dintre problemele lui Hilbert li s-au dedicat cărți separate). Exemplele ar putea continua. Mă voi opri însă asupra problemei celor patru culori, ocupanta uneia dintre pozițiile de elită din orice listă de probleme matematice celebre.

Problema are toate atu-urile unei probleme de mare carieră. În primul rînd, formularea ei este extrem de simplă, nu presupune nici un fel de cunoștințe matematice (în afara științei de a număra) și poate fi sintetizată în cîteva cuvinte. Iată-o, într-o formulare pe care dinadins am ales-o de acolo de unde am ales-o: „era vorba de a arăta că numai patru culori erau absolut suficiente pentru a avea pe oricare hartă imaginabilă în toate cazurile posibile suprafețe vecine diferite colorate”. (Precizez că este vorba de hărți plane, desenate adică pe o suprafață plană, regiunile ei se presupun închise, iar „vecine” sînt regiunile care au o linie comună; două regiuni care se întîlnesc într-un punct sau chiar într-un număr finit de puncte nu sînt considerate vecine). Citatul este scos din „Prima lecție de geometrie”, din volumul de povestiri științifico-fantastice *Istории insolite*, publicat de Ov. S. Crohmălniceanu la Editura Cartea Românească, București, 1980.

În al doilea rînd, problema a rămas nerezolvată un număr mare de ani, peste un secol, suficient de mult pentru a „face istorie”. Surprinzător de grea, demnă de preocuparea matematicienilor de prestigiu, cu o formulare la îndemîna oricui, deci tentantă pentru orice amator de raționamente ingenioase, problema a intrat și a rămas în atenția unui mare număr de

oameni. Povestea ei începe exact la jumătatea secolului trecut, la Londra, și pentru prima dată apare într-o scrisoare a studentului în matematici Francis Guthrie către fratele său Frederick, student la chimie. Frederick o comunică lui August DeMorgan, unul dintre matematicienii cunoscuți ai vremii, care-i vorbește despre ea într-o scrisoare datată 23 octombrie 1852 lui Sir W.R. Hamilton, cel după al cărui nume sînt numite „drumurile hamiltoniene” din teoria grafurilor (a se vedea secțiunea 25.2). Sir Hamilton a răspuns cu un vizibil dezinteres la scrisoarea lui DeMorgan, însă acesta din urmă, intrigat de dificultatea problemei, a vorbit despre ea și altor matematicieni. Problema ajunge astfel publică, la modă chiar. În 1878, Arthur Cayley ridică problema în fața Societății de Matematică din Londra, consacrand-o astfel oficial. În 1879, avocatul londonez Arthur Bray Kempe (membru al Societății de Matematică) publică o lucrare în care afirmă că a rezolvat problema în sensul afirmativ. Abia peste unsprezece ani, Percy John Heawood, un matematician care s-a preocupat 60 de ani de suficiența celor patru culori, descoperă că raționamentul lui Kempe este incomplet. (Un contraexemplu la demonstrația lui Kempe poate fi găsit în figura 25.10.) P.J. Heawood publică ultimul său articol legat de problemă în 1947, fără a ajunge încă la soluționarea ei. Din 1852, anul scrisorii fraților Guthrie, pînă în 1976, anul în care problema a fost rezolvată (timp în care cartografi și-au colorat liniștiți hărțile cu patru culori), literatura conexă a devenit enormă, mai ales prin implicațiile problemei în teoria grafurilor. (În anul 1967 apare la Academic Press, New York, cartea *The four color problem*, de Oystein Ore, dedicată istoriei acestei probleme și încheiată cu o voluminoasă bibliografie.) Povestea problemei este detaliat și savuros prezentată de Florica T. Câmpan în *Probleme celebre* (Editura Albatros, București, 1972), care îi consacră aproape patruzeci de pagini, este adevărat, cu acțiunea plasată în rumoarea bahică a restaurantului „Moldova” din dulcele tîrg al Ieșilor.

Să urmărim cîteva dintre rezultatele parțiale care au punctat istoria problemei.

În primul rînd, faptul că trei culori nu sînt suficiente pentru a colora orice hartă a fost repede vizibil; hărți cu exact patru regiuni cer uneori mai mult de trei culori (așa este harta din figura 8.1). Pe de altă parte, August DeMorgan a demonstrat că nu există o hartă formată din cinci regiuni care să fie două cîte două vecine. Cu alte cuvinte, hărțile cu cinci regiuni pot fi colorate cu patru culori. Evident, acest rezultat nu rezolvă problema, deoarece există hărți cu șase, șapte,... regiuni. Am amintit de „demonstrația” lui Arthur B. Kempe, dovedită între timp incorrectă. Kempe redusese problema la hărți *normale*, hărți în care nu există țări închise complet în alte țări și nici puncte în care se întîlnesc mai mult de trei regiuni. În 1913, un matematician de la M.I.T., Philip Franklin, ridică limita numărului de regiuni pentru care problema este rezolvată de la cinci, la cît o stabilise DeMorgan, la douăzeci și unu: orice hartă cu 21 de regiuni poate fi colorată cu patru culori. În 1940, Winn reușește să ajungă la 35 de regiuni.

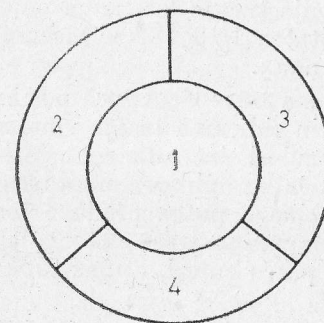


Fig. 8.1.

Pe de altă parte, o „teoremă a celor cinci culori” (faptul că cinci culori sînt suficiente pentru a colora o hartă) a fost obținută destul de ușor și fără a implica o matematică prea complicată. O demonstrație elementară a acestui rezultat poate fi găsit în H. Rademacher, O. Toeplitz, *Despre numere*

și figuri, Editura științifică, București, 1968. De fapt, raționamentul cu care Kempe a eșuat în a demonstra o teoremă a celor patru culori poate fi folosit cu succes pentru a obține o teoremă a celor cinci culori.

Iată acum un rezultat cu totul interesant, datorat lui P.J. Heawood: Probabilitatea de a găsi o hartă cu mai mult de 36 de regiuni (cu mai puțin de 36 nu se poate, știm asta) care să nu poată fi colorată cu patru culori este mai mică decât $1/10^{10\,000}$. Este aproape imposibil să ne imaginăm cât de mare este numărul $10^{10\,000}$. Pe o pagină dactilografiată (31 de rânduri a câte 80 de semne fiecare) intră aproximativ 2 500 de semne. Avem nevoie deci de patru pagini complete, pe care să scriem cele 10 000 de zerouri ale numărului $10^{10\,000}$. Pe de altă parte, Pământul este format din aproximativ 10^{50} atomi. Nu putem compara aceste numere; acesta din urmă se scrie pe un singur rând dactilografiat și tot mai rămân treizeci de spații libere! Nici numărul atomilor din întreaga galaxie nu se ridică la nivelul numitorului fracției lui Heawood.

Pare nu greu, ci imposibil de găsit un exemplu de hartă care să infirme conjectura celor patru culori. „Norocul“ de a realiza probabilitatea $1/10^{10\,000}$ ar face să leșine pe orice proprietar de cazinou...

Prin anii 1950 s-a întrevăzut însă posibilitatea de a rezolva problema prin ridicarea însăși a numărului de regiuni pentru care patru culori sînt suficiente. Mai exact, problema a putut fi redusă la examinarea unor așa-zise configurații inevitabile. Dacă cineva putea produce toate configurațiile inevitabile și apoi reușea să arate că toate aceste configurații pot fi colorate cu patru culori, atunci problema putea fi rezolvată.

Așa s-a și întîmplat și acesta este al treilea argument în favoarea celebrității (mai ales viitoare) a problemei: rezolvarea ei neobișnuită. Reducerea problemei la găsirea unui set complet de configurații inevitabile s-a făcut printr-o demonstrație clasică, „cu creionul pe hirtie“. La fel s-a arătat că reducerea acestor configurații implică rezolvarea afirmativă a problemei. Găsirea configurațiilor inevitabile și reducerea lor efectivă nu erau însă activități posibile manual. A apărut

însă și s-a dezvoltat calculatorul electronic, probabil cea mai importantă descoperire a secolului XX. Cu ajutorul lui, problema a fost, în sfîrșit (în 1976), rezolvată și lumea matematică (și filozofică; întotdeauna uimirile matematicii se repercutază asupra filozofiei) a fost pusă în fața unei situații cu totul inedite. Demonstrația prin care „problema celor patru culori“ (de fapt, „conjectura celor patru culori“) a fost înlocuită cu „teorema celor patru culori“ era de un tip nemăintîlnit pînă atunci în matematică, un tip care a dat și încă dă naștere atît la contestații și aprecieri sceptice, cît și la afirmații entuziaste. Într-adevăr, toate teoremele matematice care se cunoșteau pînă la 1976 avea demonstrații „de mină“, scrise de matematicieni, citibile de către matematicieni și, lucru foarte important, verificabile de către matematicieni în sensul că puteau fi urmărite pas cu pas, controlate în toate amănuntele și validate „cu creionul“ într-un timp limitat rezonabil de lung. (Ce înseamnă „timp rezonabil de lung“ pentru un matematician pătimaș, asta este o altă poveste...) Ei bine, demonstrația teoremei celor patru culori nu îndeplinește aceste cerințe! Demonstrația a fost obținută printr-un dialog om—calculator în care partea de calcul este imensă, nu poate fi făcută manual (trei calculatoare de mare putere au lucrat aproape 1 200 de ore la ea) și deci — aspectul grav — nu poate fi nici verificată manual, ci tot printr-un program de calculator care să repete calculele. Or, se știe că nu există metode universale pentru a testa corectitudinea unui program. Verificarea demonstrației revine la verificarea unui program și aceasta este — la modul general — o problemă nerezolvabilă algoritmic! (Nu există un algoritm unic care să verifice toate programele posibile.)

Așa cum am spus, impactul filozofic al demonstrației a fost foarte mare. Mă voi referi la un singur articol, cel al lui Edward R. Swart, apărut în „*The American Mathematical Monthly*“, 87,9 (1980) și intitulat chiar „Implicațiile filozofice ale problemei celor patru culori“. De fapt, acest articol este o replică la un articol apărut în februarie 1979 în „*Journal of Philosophy*“: Thomas Tymoczko, „Problema celor patru culori și semnificația ei filozofică“. Teza lui Tymoczko este

că sau teorema celor patru culori nu este o teoremă matematică, sau ea este o teoremă de un gen nou, un adevăr *a posteriori*, inexistent în natură ca un adevăr *a priori*, ca orice adevăr matematic. Argumentul lui Tymoczko se bazează tocmai pe imposibilitatea de verificare manuală, umană, a demonstrației, pe implicarea calculatorului și imposibilitatea de a fi „siguri” pe un calculator. E.R. Swart nu este de acord cu preopinentul său și de cele mai multe ori pare a avea dreptate. Nu voi insista pe linia acestei discuții. Că demonstrația, așa cum se prezintă ea acum, nu poate satisface cerințele tradiționale ale matematicienilor este o realitate, însă dramatismul situației este numai aparent. Într-adevăr, calculatorul a fost folosit numai pentru a face calcule, aceste calcule erau, într-un anume sens, de rutină (deși extrem de numeroase), iar programul utilizat poate fi verificat și validat. (Cazurile particulare ale problemelor nerezolvabile algoritmice pot fi rezolvate, însă rezolvarea nu poate fi generalizată.) Va trebui deci să acceptăm existența unor demonstrații care nu sînt principial accesibile omului în totalitate, să acceptăm dreptul calculatorului de a ne fi partener inevitabil în stabilirea adevărilor matematice. Implicațiile filozofice ale acestor aspecte, vizînd direct „posibilitățile și limitele metodelor matematice pure și cele ale calculului”, sînt foarte adînci și vor ține încă multă vreme treaz interesul pentru problema/teorema celor patru culori. Citatul anterior este din eseu „The four-color problem” (în volumul *Mathematics Today. Twelve Informal Essays*, Editor L.A. Steen, Springer Verlag, 1978) scris de Kenneth Appel și Wolfgang Haken, cei doi matematicieni de la Universitatea din Illinois care s-au consacrat în întregime problemei între anii 1972 și 1976, reușind să o rezolve în vara lui 1976. (Reușita a fost anunțată în „Buletinul Societății Americane de Matematică” în septembrie 1976, prezentată apoi verbal la un simpozion al aceleiași societăți la Toronto, iar în 1977 a apărut în revista „Illinois Journal of Mathematics”, 21 (84), septembrie, paginile 428—567, articolul „Every planar map is four-colorable.”) Citatul anterior se continuă cu „probabil că există probleme pe care nici una dintre cele două metode (matematica

pură și calculul, n.n.) singure nu le pot rezolva, dar pot fi rezolvate printr-o combinație a lor”. Problema celor patru culori pare a fi un exemplu de acest tip. Deocamdată *pare* numai, deoarece nu s-a demonstrat că ea nu poate fi rezolvată și altfel și nu este exclus (dar este improbabil) ca „proverbiala scîlpire de geniu a studenților” (K. Appel, W. Haken, op. cit.) să furnizeze în cele din urmă o demonstrație tradițională, eliberată de calculator.

Un prim pas spre o asemenea demonstrație a fost deja făcut. Folosind o procedură nouă de reducere a configurațiilor inevitabile, F. Allaire (coleg cu E.R. Swart, deci, ca și acesta, lucrînd probabil la Universitatea din Waterloo, Ontario, Canada) a reușit să obțină o demonstrație a teoremei în numai 50 de ore de calcul (cu calculatorul, bineînțeles). De la cele 1 200 de ore necesare lui Haken și Appel la cele 50 ale lui Allaire progresul este remarcabil. (Rezultatul lui Allaire este publicat în „Proceedings of the Seventh Manitoba Conference on Numerical Mathematics and Computing”, 1977, paginile 3—72.)

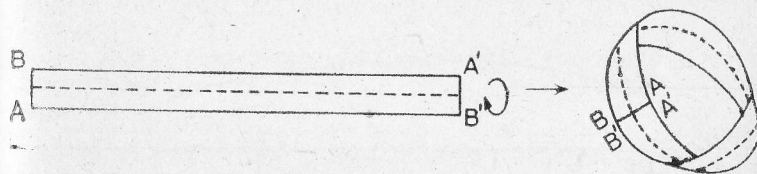


Fig. 8.2.

În încheiere, voi aminti un fapt surprinzător. Dacă nu ne mai referim la hărțile plane, ci la hărți desenate pe altfel de suprafețe geometrice, atunci rezolvarea problemei de colorare este, de cele mai multe ori, incomparabil mai simplă. De pildă, pe banda lui Moebius (suprafața obținută dintr-o bandă de hîrtie prin lipirea capetelor după o jumătate de răsucire; vezi figura 8.2) s-a putut stabili o „teoremă a celor șase culori”. (Faptul că cinci culori nu sînt suficiente poate fi

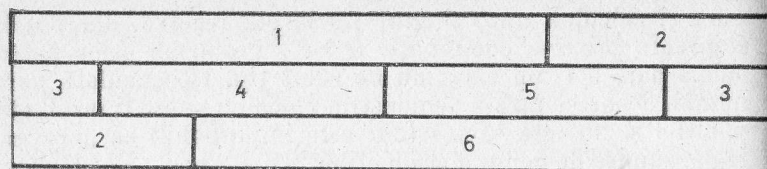


Fig. 8.3.

ilustrat de harta din figura 8.3; presupunem că banda este transparentă și culoarea este vizibilă pe ambele fețe).

Pe tor (suprafața unui pneu de automobil este o bună imagine) este adevărată o „teoremă a celor șapte culori“. În figura 8.4. se dă un exemplu de hartă pe tor care cere șapte culori. (Ca și figura 8.3, acest exemplu este împrumutat din capitolul 7 al lucrării *Experiments in Topology* de Stephen Barr, apărută în 1972 la Thomas Y. Crowell Company, New York.)

Pe suprafața sferei, problema este echivalentă cu cea din plan. Pe suprafețele uzuale geografiei, planul și sfera, patru culori sînt suficiente pentru a colora orice hartă, dar acest lucru este atît de greu de demonstrat, în timp ce suprafețe

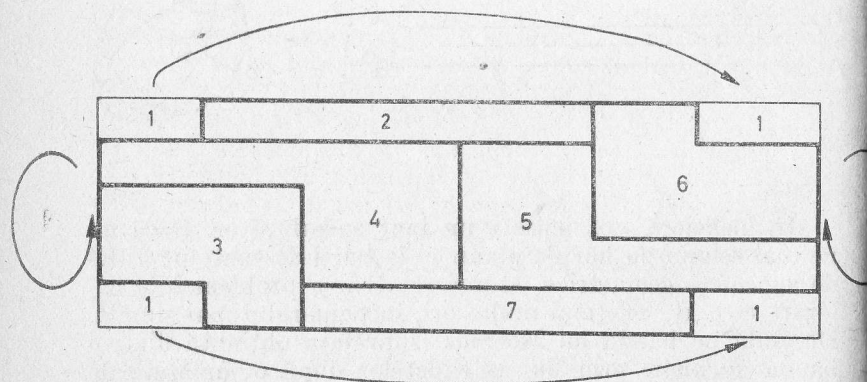


Fig. 8.4.

„patologice“ (cum ar fi banda lui Moebius care are o singură față!), pe care geografia este „neeconomicoasă“, cerînd mai mult de patru culori, și-au cedat atît de ușor misterele!

Pentru că am amintit de banda lui Moebius, iată încă o referire interesantă la acest geometru. În jurul anului 1840, el lansa următoarea problemă: „Un rege avea cinci fii. În testamentul său el lasă fiecăruia dintre cei cinci moștenitori cîte o parte a regatului, cu condiția ca aceștia să-și delimiteze părțile în așa fel încît oricare două dintre acestea să fie vecine între ele.“ Probabil că Moebius știa că problema nu are soluție. (Acest lucru a fost demonstrat — nu știu dacă în replică la problema lui Moebius sau nu — de către DeMorgan, cu aproximativ un deceniu mai tîrziu.) Problema lui Moebius este înrudită deci cu problema celor patru culori. Ele nu sînt însă echivalente. Ignorarea acestui fapt a făcut ca mult timp Moebius să fie considerat autorul problemei celor patru culori. Adevărul a fost restabilit, în sensul celor spuse la începutul secțiunii de față, odată cu descoperirea scrisorii prin care DeMorgan comunică problema lui Hamilton, amintind (cu amănunte) de autorii ei: frații Francis și Frederick Guthrie.

9. CE POT ȘI CE NU PÔT FACE ALGORITMI

Calculatoarele electronice au intrat definitiv în viața noastră cea de toate zilele. Plătim telefonul și curentul electric pe facturi — chitanțe eliberate de calculator. Facem planificarea și urmărirea producției în întreprinderi pe calculator. Topurile de muzică ușoară se fac — modern, rapid, elegant, obiectiv! — cu ajutorul calculatorului. În teorema celor patru culori calculatorul s-a așezat la aceeași masă cu matematicianul. S-au scris versuri cu calculatorul (comparabile cu versurile unor poeți cu legitimație la Uniunea Scriitorilor...), s-au pictat tablouri, s-a compus muzică.

Iar microprocesoarele, acele așchii de siliciu în care atomii se aliniază frumos și lucrează exact ca tranzistoarele și

relele care umplu dulapuri întregi într-un calculator de generația a treia, promet (și deja realizează) minuni și mai mari.

Și totuși, calculatorul de la Universitatea Illinois nu a fost luat coautor al lucrării în care s-a prezentat rezolvarea problemei celor patru culori. Pentru că el nu este decît un instrument, o unealtă anorganică, o prôteză a gîndirii, așa cum luneta este o prôteză a vederii. Iar America a fost descoperită de Cristofor Columb, nu de către Columb, împreună cu luneta lui! Cel puțin deocamdată, calculatorul face ceea ce-i spun oamenii să facă, el realizează algoritmi, el nu poate să facă altceva decît algoritmi și numai pe aceia pe care i-i indică omul. Într-o formulare imprecisă, calculatoarele pot sau nu pot să facă exact ceea ce pot sau nu pot să facă algoritmi.

Ce este însă un algoritm?

Într-un anume sens, toată lumea știe ce este un algoritm, dar, în alt sens, nimeni nu știe ce este un algoritm. Voi explica această afirmație, numai aparent paradoxală.

Să ne gîndim la o rețetă de făcut cafea. Iată o alternativă posibilă: 1) pune apă în ibric, 2) pune zahăr în apă, 3) pune ibricul pe aragaz, 4) aprinde aragazul, 5) așteaptă pînă fierbe apa, 6) stinge aragazul, 7) pune cafeaua în ceașcă, 8) pune apă din ibric în ceașcă, 9) amestecă și servește. Nu garantez că aceasta este cea mai bună rețetă de făcut cafea (n-am încercat-o niciodată). Ea este bună însă pentru a ilustra ceea ce este un algoritm: rețeta de mai sus este un algoritm.

Cum, numai atît?! ar fi inserat aici o întrebare ghiduș-retorică regretatul Grigore C. Moisil. Și tot el ar fi răspuns: Da, numai atît. Un algoritm este o rețetă, o însușire de instrucțiuni care, dacă sînt urmate întocmai, conduc la rezolvarea unei probleme chiar dacă nu știm de fapt cum se rezolvă acea problemă. Ordinea instrucțiunilor, formularea lor fără echivoc și cu referire la pași cît mai elementari cu putință, asigură rezolvarea problemei numai prin urmărirea instrucțiunilor, fără a fi necesară viziunea de ansamblu asupra rezolvării. Cu

alte cuvinte, un algoritm poate fi executat mecanic, mecanic la figurat, dar, de asemenea, la propriu, de către mașini. Voi reveni asupra acestui aspect.

În algoritmul anterior, parcurgerea pașilor este liniară; se începe cu pasul 1 și se termină cu 9. Am putea avea însă de făcut mai multe cafele. Primii cinci pași se pot referi la un ibric de mari dimensiuni și atunci pentru fiecare ceașcă de cafea este nevoie să repetăm numai pașii 7, 8 și 9 (fără a mai stinge aragazul după fiecare ceașcă). Obținem astfel un algoritm mai complicat, iterativ, în care apare și o instrucțiune de bifurcare: „mai este apă în ibric? dacă *da*, atunci continuă de la pasul 7, dacă *nu*, stinge aragazul“.

Exemple de algoritmi asemănători întîlnim la tot pasul. Folosirea unui ascensor, pornirea unui autoturism, căutarea unei pagini precizate într-o carte etc. etc. Dar nu despre acești algoritmi doresc să discut aici. Am plecat de la ei pentru a arăta că toată lumea folosește algoritmi, într-un anume sens, „toată lumea știe ce este un algoritm“.

Apropiindu-ne de obiectul discuției noastre, să remarcăm faptul că toată lumea știe o mulțime de algoritmi matematici. Într-adevăr, după ce a trecut de clasa a III-a, orice elev știe să facă înmulțiri cu numere cu oricît de multe cifre. Vă amintiți, nu? „Așezăm numerele unul sub altul, aliniate la dreapta, înmulțim cu ultima cifră a înmulțitorului ultima cifră a deînmulțitului...“ și așa mai departe. Toată lumea știe algoritmul înmulțirii, la fel cum îl știe pe cel al împărțirii, al evaluării unui polinom într-un punct, al testării dacă un număr dat este par sau impar (chiar dacă ar mai fi existat cineva care să nu cunoască cifrele pare și impare, de cînd cu circulația alternată duminică a autoturismelor proprietate personală, toată lumea este în cunoștință de cauză...).

Să remarcăm aspectele comune ale acestor algoritmi. Ei pleacă sau de la numere (deci de la șiruri de cifre) sau de la un polinom și un număr (deci de la șiruri de cifre, litere și alte semne algebrice) și conduc la un rezultat de forma unui șir de cifre (sau de litere în unele cazuri) sau la un răspuns „da“ sau „nu“. Și aceste răspunsuri pot fi scrise simbolice, numerice chiar: să punem 0 pentru „nu“ și 1 pentru „da“. Orice al-

goritm din cei enumerați mai sus (în general, orice algoritm matematic) face deci trecerea de la niște șiruri de intrare la niște șiruri de ieșire. Lucru important: trecerea se face într-un timp finit, rezolvarea unei probleme nu se poate considera rezolvare dacă nu se termină niciodată.

Plasându-ne în aria algoritmilor matematici, trebuie să fim de acord că nu mai este ușor să răspundem la întrebarea „ce este un algoritm?” Definiția „un algoritm este o rețetă care...” nu satisface; ea nu este o definiție matematică, nu se poate opera cu ea într-o teorie matematică, nu este „formalizată”. Ajungem astfel la justificarea antitezei din paradoxul de la început: nu există o definiție matematică a algoritmilor (nu există încă și probabil că nu va exista niciodată). Există însă *reprezentări* matematice de algoritmi. Despre cea mai cunoscută dintre ele, mașina Turing, vom discuta în continuare.

Să ne gândim la un calcul numeric, la o înmulțire, de exemplu, și să încercăm să-l analizăm pînă la reducerea sa la elementele esențiale. Observăm de la început că operăm cu șiruri de cifre (în general, cu șiruri de simboluri dintr-un alfabet bine precizat). Numai puține înmulțiri se pot face mental; de cele mai multe ori avem nevoie de hîrtie pentru aceasta. Avem deci de-a face cu un *suport* pe care să lucrăm. În mod uzual, el este format dintr-o foaie de hîrtie, sau din mai multe. Să considerăm cazul cel mai simplu, cel în care avem la dispoziție o bandă de hîrtie suficient de lungă pentru calculele noastre. Evident, tot ce se poate scrie pe o foaie dreptunghiulară de hîrtie se poate scrie pe o bandă. De exemplu, înmulțirea

$$\begin{array}{r} 42 \times \\ 75 \\ \hline 210 \\ 294 \\ \hline 3150 \end{array}$$

se poate scrie $42 \times 75 = 210 + 2\,940 = 3\,150$.

Care sînt operațiile *cele mai simple* care se pot face asupra conținutului unei benzi de hîrtie? Sînt numai două: *citirea*

unei cifre și *modificarea* unei cifre (eventual, scrierea unei cifre noi). Citirea înseamnă memorarea cifrei, folosirea informației căpătate astfel. Într-o înmulțire apar cifre care „se țin minte”. Sîntem astfel conduși la a considera o *memorie*, un „creier” care face calculul. El este cel care citește (deci are un dispozitiv de citire) și scrie pe bandă (are un dispozitiv de scriere). Cel mai simplu lucru pe care îl putem presupune despre acest „creier” este că el are un anumit conținut, o *stare*, care se modifică în timpul calculului. În general, starea se modifică după fiecare citire sau scriere.

Procesul descris mai sus poate fi imaginat fizic ca desfășurându-se cu ajutorul unui dispozitiv ca acela din figura 9.1.

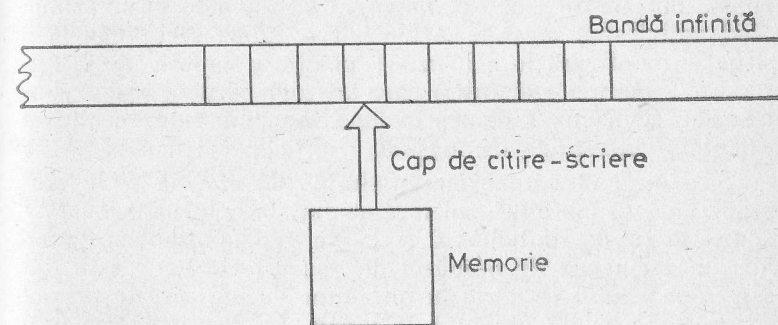


Fig. 9.1.

Banda de intrare-ieșire a fost împărțită în căsuțe, fiecare căsuță putînd conține un simbol; capul de citire-scriere are acces la o singură căsuță și se mișcă trecînd de la o căsuță la alta alăturată. Mulțimea stărilor memoriei se consideră finită. Calculul începe cu memoria într-o *stare inițială* și cu capul de citire-scriere plasat în dreptul celui mai din stînga simbol scris pe bandă.

Dispozitivul anterior este exact o mașină Turing, așa cum a fost ea imaginată de Alan Turing între anii 1936—1937, urmînd un raționament de esențializare și abstractizare a

noțiunii de calcul similar probabil celui pe care l-am repetat mai sus.

Să notăm aspectul picant și de puțin timp cunoscut că în timpul celui de-al doilea război mondial, Turing a condus o echipă englezească de descifrare a mesajelor secrete, echipă care a dat multă bătaie de cap germanilor prin eficacitatea ei.

Funcționarea unei mașini Turing poate fi descrisă printr-un șir de instrucțiuni care precizează starea mașinii după executarea instrucțiunii, direcția de mișcare a capului de citire-scriere (stînga, dreapta, nu se mișcă) și simbolul care (eventual) se scrie în căsuța examinată, toate acestea fiind dependente de simbolul examinat și de starea mașinii înainte de executarea instrucțiunii. Un asemenea șir de instrucțiuni poartă numele de *program Turing*. Calculul se oprește atunci cînd activitatea mașinii se blochează, adică se ajunge la o situație (configurație a benzii + poziție a capului de citire-scriere + stare a memoriei) care nu mai permite nici o continuare. Conținutul benzii în acel moment este rezultatul calculului întreprins de mașină.

Să considerăm un exemplu simplu de mașină și de program Turing. Fie alfabetul format din simbolurile 0, 1, P , I și fie un șir de simboluri 0 și 1. Ne punem problema dacă într-un asemenea șir numărul de apariții ale lui 1 este par sau impar. Vom construi un program Turing care în primul caz scrie pe bandă simbolul P , iar în al doilea caz scrie simbolul I . Mașina Turing considerată are numai două stări: s_P și s_I (prima se referă la informația „am întilnit un număr par de apariții ale lui 1”, a doua codifică informația „am întilnit un număr impar de cifre 1”). Starea s_P se consideră stare inițială („am întilnit 0 apariții ale lui 1”). Toate căsuțele benzii neocupate inițial cu 0 sau cu 1 sînt ocupate cu un simbol special, b , indicînd o căsuță goală. Iată programul anunțat:

1. $(s_P, 0, s_P, b, \rightarrow)$ (dacă din starea s_P se citește simbolul 0, atunci se rămîne în starea s_P , se șterge simbolul 0 și se merge la dreapta);

2. $(s_P, 1, s_I, b, \rightarrow)$ (paritatea se schimbă prin întilnirea cifrei 1);

3. $(s_I, 0, s_I, b, \rightarrow)$ (întilnirea lui 0 nu modifică paritatea);

4. $(s_I, 1, s_P, b, \rightarrow)$;

5. $(s_P, b, s_P, P, \downarrow)$;

6. $(s_I, b, s_I, I, \downarrow)$ (în final scriem P sau I și ne oprim; indică faptul că nu se mai mută capul de citire-scriere).

Mașina își mută capul de citire-scriere spre dreapta, schimbîndu-și starea în funcție de paritatea numărului de apariții ale simbolului 1 pe care le întilnește; La terminarea explorării șirului (la întilnirea unei căsuțe completate cu b), ea scrie P sau I în funcție de starea în care a ajuns acolo și se blochează.

Mașina anterioară este de un tip particular: capul ei de citire-scriere merge numai spre dreapta, cu un pas la fiecare tact de funcționare. Este ceea ce se cheamă un *automat finit*, unul dintre cele mai restrictive (și mai importante) tipuri de mașini matematice.

Să urmărim activitatea acestei mașini în evaluarea șirului 01101. Figura 9.2 prezintă mașina la fiecare pas al calculului. Într-adevăr, răspunsul este I : șirul 01101 conține un număr impar de apariții ale cifrei 1.

Ce pot face mașinile Turing?

Multe, foarte multe lucruri. Se crede chiar că ele pot face tot, tot ce se poate face algoritmic, bineînțeles.

Mai exact, Turing a afirmat că mașinile sale pot calcula tot ce se poate calcula. Afirmatia a fost apoi întărită de un alt mare logician, Alonzo Church, și ea este cunoscută acum sub numele de *teza Turing-Church*.

Evident, aceasta este doar o ipoteză, ea nu poate fi demonstrată atîta timp cît nu se cunoaște precis ce este calculabil algoritmic. Teza ar putea fi eventual infirmată dacă cineva ar imagina un algoritm care să nu poată fi executat de o mașină Turing. Acest lucru nu s-a întîmplat însă pînă acum. Într-adevăr, în ciuda simplității lor morfologice și funcționale, mașinile Turing sînt extraordinar de puternice în ceea ce privește capacitatea lor de calcul. Orice algoritm (bineînțeles, de calcul nu și cel de făcut cafea) poate fi executat de o mașină Turing potrivită.

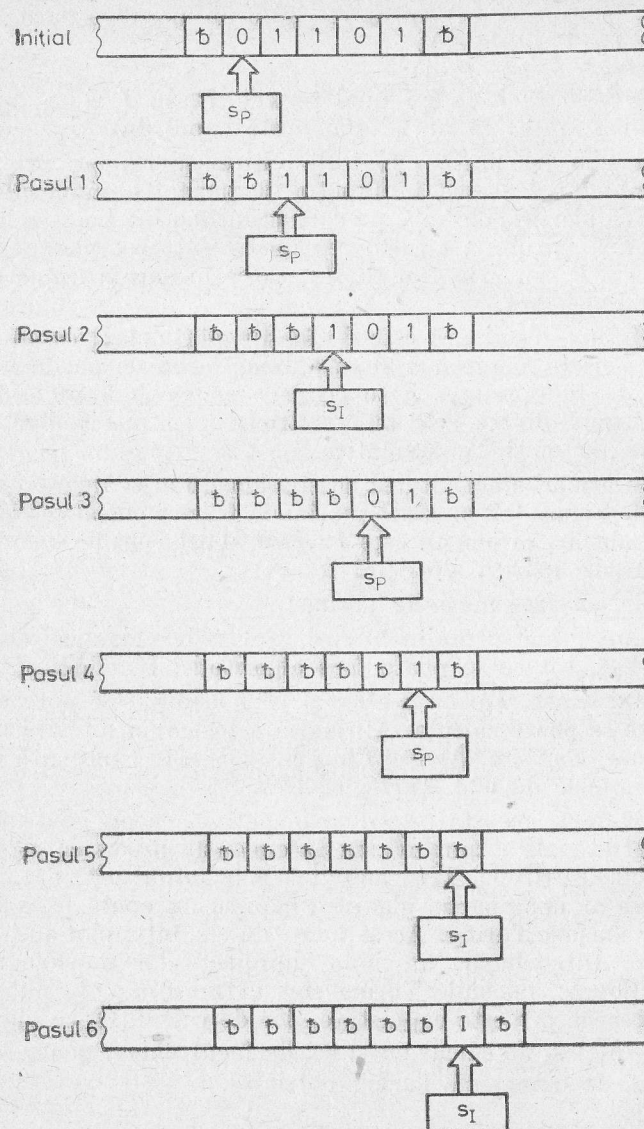


Fig. 9.2.

În sprijinul tezei Turing-Church se mai pot aduce și alte argumente. Modul în care am ajuns mai înainte la definirea mașinilor Turing arată că aceste dispozitive „prind” esența calculului, par a nu le scăpa nimic esențial, sînt la fel de puternice ca orice algoritm. În sfîrșit, un alt argument, de natură oarecum psihologică, este credința în geniul unor oameni ca Turing, Church, Kleene, Gödel, Post (Post considera teza Turing-Church nu ca o ipoteză, ci ca o „descoperire fundamentală” privind „puterea de matematizare a lui Homo Sapiens”), care au crezut în teza în discuție și au propus diverse moduri de a reprezenta algoritmi, *toate echivalente ca putere de calcul cu mașinile Turing*. Iată cîteva asemenea reprezentări mai cunoscute:

1. mașinile Turing (Turing, 1936–1937),
2. λ — calculul (Church, 1941),
3. sistemele Post (Post, 1943),
4. algoritmi normal Markov (Markov, 1951)¹,
5. gramaticile Chomsky (Chomsky, 1956–1959),
6. TAG — sistemele (Post, 1965).

De asemenea, majoritatea limbajelor de programare evaluate pot codifica la fel de mulți algoritmi cît mașinile Turing, cu alte cuvinte, calculatoarele electronice pot face exact acele lucruri care pot fi efectuate de o mașină Turing. Să remarcăm în acest context că mașina Turing este considerată prototipul teoretic al calculatoarelor electronice de astăzi; John von Neumann, unul dintre creatorii acestor calculatoare, declara că a fost inspirat în mod fundamental de lucrările lui Turing.

Teza Turing-Church poate fi exprimată foarte sugestiv sub forma „tot ce este uman calculabil este calculabil și mecanic”. Cu alte cuvinte, inteligența mecanică, artificială are aceeași capacitate *de calcul* cu inteligența umană. Nu se pune aici problema performanțelor. Reducînd calculul la operații elementare cu simboluri, mașinile Turing sînt lente; calculatoarele electronice au atins performanțe uluitoare ca

¹ Este vorba de A.A. Markov-fiul și nu de A.A. Markov-tatăl, specialistul în teoria probabilităților și cel care a introdus procesele cunoscute azi sub numele de procese Markov.

număr de operații efectuate pe secundă. Mașinile teoretice (datorită gradului avansat de rigoare formală și de generalitate) sînt greoaie, cele reale (calculatoarele) sînt din ce în ce mai rapide (asta le și justifică apariția și existența).

Nu este aici locul să discutăm despre raporturile dintre inteligența artificială și cea umană. Există însă elemente care indică adevărate prăpastii între cele două. Să ne amintim de teoremele lui Gödel al căror corolar era că „aritmetica nu se poate formaliza”. Calculatoarele, de orice generație ar fi ele, nu pot să producă nici măcar aritmetica pe care au produs-o creierile umane, cu atît mai puțin întreaga matematică. Teoremele lui Gödel fac astfel imposibil (la acest nivel al competiției) coșmarul unor povestiri științifico-fantastice privind o posibilă lume în care mașinile ar ajunge mai inteligente decît oamenii. În planul performanțelor însă, chiar dacă sînt construite de noi, calculatoarele ne pot umili în numeroase situații. Noroc că ele nu *știu* asta...

Ce nu pot face mașinile Turing?

Există „mult” mai multe lucruri pe care mașinile Turing nu le pot face decît cele pe care le pot face. Mă refer, bineînțeles, la calcule. Mașinile Turing nu pot face decît calcule algoritmice, nu pot calcula decît funcții care pot fi calculate și de alți algoritmi, nu pot rezolva decît problemele care pot fi rezolvate și de alți algoritmi. Și există mult mai multe funcții decît algoritmi și mult mai multe probleme decît algoritmi. Aceste afirmații pot căpăta un înțeles precis în sensul că se poate arăta că există atîția algoritmi cîte numere naturale, dar mulțimea funcțiilor de la mulțimea numerelor naturale în ea însăși este mult mai bogată (este de cardinal continuu; lămuriri privind terminologia pot fi găsite în secțiunea 14). Există deci funcții care nu se pot calcula. (În discuția anterioară, prin algoritm înțelegem „mașină Turing” sau orice altă reprezentare a algoritmilor din lista prezentată mai sus.)

Probabil că mulți cititori vor fi șocați de afirmația că există funcții pentru care nu există nici o rețetă de calcul. Într-adevăr, în toată practica școlară (afirmația este valabilă în mare măsură și pentru învățămîntul superior) nu se

lucrează decît cu funcții precizate prin expresii analitice implicînd operații algebrice, logaritmi, funcții trigonometrice, exponențieri etc. Să ne gîndim însă la exemplul de mașină Turing din paragraful precedent și să definim o funcție, s-o notăm cu h , pe mulțimea șirurilor de simboluri 0, 1 și cu valori în mulțimea $\{P, I\}$:

$$h(x) = \begin{cases} P & \text{dacă șirul } x \text{ conține un număr par de apariții ale lui 1,} \\ I & \text{în cazul contrar.} \end{cases}$$

Avem aici un alt fel de funcție, a cărei evaluare pentru un șir oarecare cere vizibil folosirea unui algoritm ad-hoc.

Este greu de dat un exemplu intuitiv de funcție necalculabilă algoritmic. Mai ușor și mai sugestiv poate fi însă un exemplu de problemă care nu se poate rezolva algoritmic. Voi prezenta problema lui Post, una dintre primele cunoscute ca nerezolvabilă algoritmic. De fapt, este vorba de o întreagă clasă de probleme, de cazuri ale unei probleme generale, obținute prin varierea datelor de intrare, a parametrilor problemei.

Să considerăm două mulțimi finite de șiruri de simboluri, $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$. Să căutăm o secvență de indici $i_1, i_2, \dots, i_k$ astfel încît să obținem $x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} = y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_k}$. Dacă o asemenea secvență există, spunem că problema lui Post pentru X și Y are soluție.

Iată două exemple:

$$\begin{aligned} X_1 &= \{ab, ba, aa, bb\}, \\ Y_1 &= \{aba, bba, aaa, baa\}, \end{aligned}$$

și, respectiv,

$$\begin{aligned} X_2 &= \{aba, ba, bb, abba\}, \\ Y_2 &= \{aaba, ab, aab, abb\}. \end{aligned}$$

Se poate vedea imediat că problema lui Post pentru X_1, Y_1 nu are soluții, deoarece toate șirurile din Y_1 sînt mai lungi decît fiecare dintre șirurile din X_1 . Pe de altă parte, șirul *abbababa* indică o soluție a problemei pentru X_2 și Y_2 . Într-adevăr, acest șir se poate scrie atît sub forma

$x_4x_2x_2x_1$, cit și sub forma $y_1y_2y_2y_1$ (secvența de indici este deci 4, 2, 2, 1).

În cazul anterior, pentru fiecare pereche X, Y am procedat altfel pentru a afla dacă problema are sau nu soluție. Este natural să ne întrebăm dacă există cumva un algoritm, o mașină Turing, de exemplu, care să rezolve problema. S-o rezolve adică pentru orice X și Y , la fel cum există o mașină Turing care produce rezultatul înmulțirii a două numere pentru orice pereche de numere. Răspunsul la această întrebare este negativ. Spunem că problema este nedecidabilă (algoritmice). Cazurile ei particulare pot fi rezolvate. Dar, atenție! ele se rezolvă prin algoritmi particulari, construți „cu ochii la problemă”. Pentru alte secvențe X și Y trebuie inventați alți algoritmi, cîte probleme atîți algoritmi.

Rezultatul lui Post poate să supere comoditatea noastră încrezătoare în „ceea ce se poate face” cu calculatoarele, cu algoritmi în general. Lucrurile sînt cumva mai grave (ori mai liniștitoare, depinde cum o luăm), deoarece există multe alte probleme care nu pot fi rezolvate algoritmice (în teoria limbajelor formale, în teoria grupurilor, în topologia algebrică etc.). Există teorii bine constituite care se ocupă de ceea ce se întîmplă „dincolo de calculabil”, dincolo de competența mașinilor Turing. Există, de pildă, grade de nerezolvabilitate; unele probleme sînt mai nerezolvabile decît altele!

Să mai adăugăm o tușă pesimistă acestor rînduri: existența unui algoritm nu înseamnă și posibilitatea utilizării lui efective. Unele probleme, deși sînt rezolvabile algoritmice, sînt atît de complicate încît rezolvarea lor durează neplăcut de mult (calculul poate avea un număr de pași care crește exponențial în funcție de lungimea șirului scris la începutul lui pe banda mașinii Turing).

De pildă, s-au descoperit clase de probleme rezolvabile algoritmice, dar care au următoarea proprietate deranjantă: oricare ar fi o mașină Turing, există un prag astfel încît oricare ar fi o problemă referitoare la un șir de simboluri de lungime (o notăm cu n) mai mare decît pragul, mașina va lucra la calculul asupra acestui șir mai mult de 2^n pași.

Pentru numărul destul de mic $n = 14$, obținem $2^{14} = 16\,384$, iar numărul $2^{2^{14}}$ este comparabil cu $10^{10\,000}$, cel care ne uimea în secțiunea anterioară prin mărimea lui.

Deși există, asemenea algoritmi sînt de nefolosit în aplicații practice.

Dar... pesimismul anterior este mai mult de natură teoretică. În problemele economice sau tehnologice, de pildă, toate funcțiile care apar sînt „cumsecade”, majoritatea problemelor sînt principial simple, în sensul că sînt vizibile algoritmice. În plus, chiar dacă o problemă nu este rezolvabilă algoritmic, aceasta este o afirmație generală, în practică noi avem de-a face cu cazuri, iar cazurile pot fi rezolvate. Evident, aceasta presupune existența unui creier, a inteligenței umane adică, alături de fiecare problemă, pentru a inventa algoritmi ad-hoc pentru fiecare problemă ad-hoc.

Din păcate, inventarea de algoritmi nu este o problemă care se poate rezolva algoritmic...

10. DESPRE ADEVĂRUL „ADEVĂRURILOR EVIDENTE”

În practica școlară de orice nivel, în manuale și cursuri și în multe articole de matematică se întîlnesc frecvent expresii de forma: „se vede imediat că...”, „este evident că...”, „obținem imediat...” Aceste sintagme indică întotdeauna omiterea unor pași în raționamentele făcute, pași care par a fi suficient de neînsemnați și de simpli pentru a nu prezenta nici un interes detalierea lor și nici un pericol ignorarea lor. Sînt pași „evidenți”.

Să ne plasăm în cazul situației școlare, cînd un profesor sau un învățător este cel care pronunță frazele de mai sus. Există patru clase în care se pot împărți afirmațiile la care se referă aceste fraze: 1) propoziții evidente atît pentru profesor cît și pentru elevi, 2) propoziții evidente numai pentru profesor, 3) propoziții care par evidente (profesorului), dar care nu sînt deloc evidente la un examen mai atent și, în sfîrșit, 4) neadevăruri care par „adevăruri evidente”.

Omiterea în expunere a adevărilor din prima clasă este necesară și dorită; ea evită pierderea de vreme pe motive neîntemeiate și lasă loc unor subiecte care merită atenție. Omiterea detaliilor referitoare la propoziții din a doua categorie poate avea influențe contradictorii asupra elevilor; unii dintre ei pot fi mobilizați de asemenea evenimente („dacă relația de pe tablă este evidentă pentru profesor, dar pentru mine nu este, atunci trebuie să lucrez suficient de mult pentru a mi se părea și mie evidentă”), alții în schimb pot să dezarmeze („de vreme ce nu mi se pare evident acest lucru simplu, înseamnă că nu sînt bun pentru matematică”). Cunoscutul matematician englez J.E. Littlewood deplîngea undeva faptul că „mereu întîlnesc oameni care se îndoiesc fără motive suficiente de posibilitățile lor potențiale” pentru matematică. Unul dintre motivele pe care el le găsea acestei stări de lucruri era tocmai „predarea proastă” a unor discipline matematice în care este frecventă omiterea detaliilor evidente (ca în analiză, de exemplu).

Nu voi insista aici mai mult asupra adevărilor din primele două categorii. Nici a treia categorie nu intră în obiectul rîndurilor de față, deși ea poate fi ilustrată cu unele exemple celebre cum ar fi teorema lui Jordan: orice linie care unește un punct exterior cu un punct interior unei curbe închise (în plan) are cel puțin un punct comun cu curba. Pe orice desen cu o curbă simplă, adevărul teoremei „sare în ochi”, dar demonstrația formală a acestui adevăr „evident” cere o abilitate matematică cu totul deosebită (voi reveni cu amănunte în secțiunea 21).

Cea de-a patra categorie, cea a „evidențelor” neadevărate poate fi ilustrată cu cîteva exemple simple, de nivel matematic elementar.

Fraze care încep cu „este evident că...” și referindu-se la propoziții false pot fi găsite în multe lucrări matematice, mai ales ale începătorilor. Dar nu numai începătorii pot greși astfel: într-o scrisoare către un prieten al său, cunoscutul Pierre Fermat enunța fără demonstrație trei propoziții dintre care nici una nu era adevărată! Iată aceste afirmații: a) nici un număr prim de forma $12m + 1$ nu divide vreun

număr de forma $3^n + 1$, b) nici un număr prim de forma $10m + 1$ nu divide vreun număr de forma $5^n + 1$, c) nici un număr prim de forma $10m - 1$ nu divide vreun număr de forma $5^n + 1$ (peste tot, m și n sînt numere naturale). Iată și cîte un contraexemplu la aceste afirmații: a) $m = 5$, $n = 5$, b) $m = 52$, $n = 5$, c) $m = 3$, $n = 7$.

Este adevărat, Fermat numea propozițiile de mai sus „simple” (pentru el, specialist în teoria numerelor) și nu neapărat „evidente”...

Autorul rîndurilor de față a făcut însă următorul experiment, cu adevărat de un nivel matematic elementar. În jur de o sută de persoane cu preocupări legate de decizia economică, au fost puse în fața următoarei probleme. Se dau trei produse, P_1 , P_2 , P_3 , despre fiecare cunoscîndu-se beneficiul anual și cheltuielile anuale. Se cere să se aleagă două dintre cele trei produse astfel încît eficiența economică totală (suma beneficiilor raportată la suma cheltuielilor) să fie maximă. Cele o sută de persoane au fost rugate să indice o metodă de a alege cele două produse de eficiență totală maximă, altfel decît calculînd eficiența fiecărei perechi de produse și comparînd rezultatele obținute.

Toate persoanele interogate au dat răspunsul: calculăm eficiența fiecărui produs și alegem cele două produse cu eficiența cea mai mare. Această soluție a fost susținută ca evidentă și încercările verbale ale subsemnatului de a zdruncina încrederea în această evidență au fost infructuoase.

Totuși, rezolvarea anterioară nu este bună. Într-adevăr, fie următorul exemplu:

produse	P_1	P_2	P_3
beneficii	4	2	3
cheltuieli	7	4	2
eficiență	$4/7$	$1/2$	$3/2$

Avem relațiile

$$3/2 > 4/7 > 1/2$$

deci ar urma să alegem pe $P1$ și $P3$. Cu toate acestea, perechea $P2, P3$ dă o eficiență strict mai mare ca cea a perechii $P1, P3$:

$$\frac{2+3}{4+2} = \frac{5}{6} > \frac{4+3}{7+2} = \frac{7}{9}.$$

Intuiția unui mare număr de persoane cu experiență a eșuat; deși „evidentă”, rezolvarea indicată de ele nu era corectă. Dificultatea a constat în faptul că evaluarea calității soluției problemei se face cu ajutorul unui indicator fracționar, eficiența. Rezolvarea propusă era tipic liniară și era corectă (și evidentă) pentru un asemenea indicator. Extrapolarea unui raționament tipic liniar la cazul fracționar (neliniar deci) a dus la eroarea discutată.

Foarte multe propoziții „evidente”, dar false pot fi întâlnite în geometrie. Nu mă refer la iluziile optice atât de cunoscute, ci la raționamentele aparent corecte efectuate pe figuri incorecte. (Este adevărat că Poincaré numea geometria „arta de a raționa corect pe figuri incorecte”, dar nu toți elevii l-au citit pe Poincaré...) Năstrușnicia rezultatelor la care se ajunge, frecvența acestora, au făcut ca de foarte multe ori, în mediul școlar, să existe o adevărată interdicție de a folosi figurile în raționamentele matematice. Evident (oare?...), poziția este exagerată; o figură nu este o demonstrație, dar o demonstrație poate fi sugerată de o figură și poate fi explicitată cu ajutorul unei figuri corecte. În plus, figurile corecte nu conduc niciodată la erori de raționament.

Iată un exemplu: pe o figură incorectă se poate „demonstra” enunțul absurd că „orice triunghi este isoscel”.

Într-adevăr, fie triunghiul ABC din figura 10.1. Construim AO bisectoarea unghiului A și PO mediatoarea laturii BC . Unim pe O cu B și cu C și coborâm din O perpendiculare pe laturile AB și AC . Din congruența triunghiurilor AMO și ANO rezultă că segmentul AM are aceeași lungime cu AN . Din congruența triunghiurilor BMO și CNO rezultă egali-

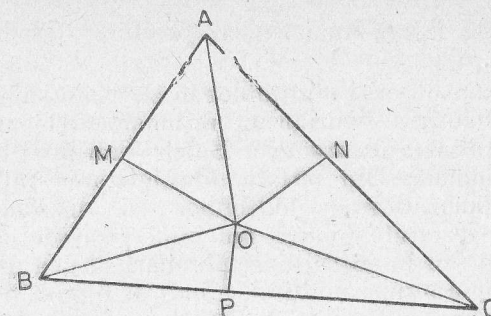


Fig. 10.1

tatea lungimilor segmentelor MB și NC . Laturile AB și AC au deci aceeași lungime și astfel triunghiul oarecare ABC este isoscel!

Raționamentul incorect de mai sus pare corect formal, dar el este victima figurii incorecte care stă la baza lui. Iată cum arată figura corectă: fig. 10.2.

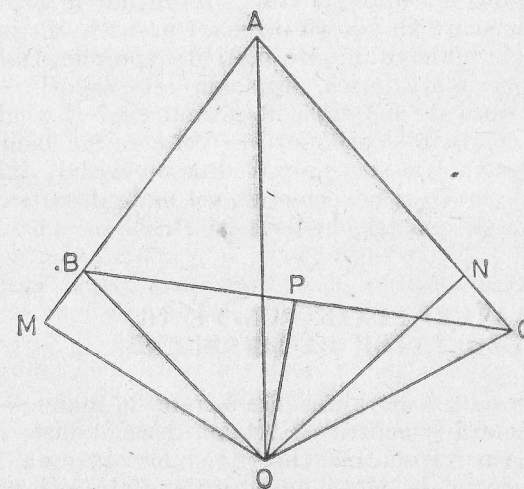


Fig. 10.2

Pe această figură nu mai este posibilă o asemenea „demonstrație“.

Introducerea teoriei mulțimilor în clasele mici a reabilitat întrucitva folosirea figurilor în raționamentele matematice (școlare), utilitatea diagramelor Euler-Venn fiind mai presus de orice îndoială. Din păcate, absolutizarea raționării pe diagrame (identificarea mulțimilor cu diagrama) poate conduce la rezultate hilare: fiul unui profesor universitar, pus de tatăl său în cursul unei plimbări să dea un exemplu de submulțime a unei mulțimi, a indicat o gură de canal ca submulțime a mulțimii delimitate de bordura străzii!... Copilul raționa strict geometric, vizual, într-o problemă care nu era de tip geometric.

Adevărul propozițiilor „evidente“, dar neadevărate este lămurit până la urmă. De o nocivitate educativă poate chiar mai mare este însă prezentarea sofisticată, laborioasă, a lucrurilor într-adevăr evidente. O formalizare împinsă până la ultimele detalii conduce la un text „de inspirație diabolică“ (J.E. Littlewood), care poate dezarma chiar și pe cei mai bine intenționați elevi, îmbrăcînd în cenușiu fapte matematice care au adesea o reală frumusețe intrinsecă pierdută astfel. Subiectul merită o atenție specială. Dar nu într-o carte *despre* matematică, așa cum este aceasta, ci în una pentru autorii de manuale în primul rînd și pentru misiunii matematicii — profesorii — cei care iau Biblia-algebră și Biblia-geometrie și o propovăduiesc elevilor, dacă nu sub umbra lui „crede și nu cerceta“, cel mai adesea sub perfidia involuntară a lui „este evident că...“.

11. SFATURI PENTRU UN TÎNĂR REZOLVATOR DE PROBLEME

Pentru că tot am ajuns să mă refer la manuale, la matematica școlară și pentru că tot am desenat niște figuri geometrice cu o pagină mai înainte, voi continua în același stil încă puțin, în ideea de a ușura viața cititorului neinteresat în aceste paragrafe: fiind alăturate, ele pot fi sărite

amîndouă deodată, performanță aproape imposibilă dacă le-ai fi plasat în locuri diferite ale volumului.

Cît despre îngîmfarea de a da sfaturi, mă consider absolvit de o asemenea acuzație prin cel din urmă sfat, cel numerotat $10 + 1$ și care, într-adevăr, va apare pe locul 11 în lista ce urmează tocmai pentru a vă face curioși pînă acolo...

(Dacă după citirea acestor sfaturi, vreun cititor reușește să rezolve probleme mai bine decît o făcea înainte, îl rog foarte mult să-mi spună și mie; aș avea cu adevărat un motiv de satisfacție.)

1. Citește enunțul de mai multe ori, de atîtea ori cîte îți sînt necesare pentru a înțelege pe deplin problema. Multe enunțuri sînt formulări complicate ale unor fapte matematice simple. Se spune chiar că multe probleme de matematică (școlară) sînt probleme de limbă, nu de matematică, înțelegerea lor în limba română fiind uneori mai dificilă decît rezolvarea propriu-zisă.

Exemplu. (Toate ilustrările pe care le voi da sînt de tipul amuzamentelor matematice; presupun că tînărul cititor cunoaște și alte exemple asemănătoare din cărțile de matematică): „Dacă cei ce vor și nu au, dar știu și numai ei nu încearcă, să se arate că toți cei care pot și nu știu, sau nu pot, dar au, încearcă.“

Este clar, nu? Dacă toți cei care citesc încearcă și nu înțeleg, atunci nici cel care scrie nu înțelege...

Și totuși, problema este foarte simplă. Să notăm cu A mulțimea celor care *vor*, cu B mulțimea celor care *au*, cu C mulțimea celor care *știu* și cu D mulțimea celor care *încearcă*. Ipotezele din enunț se scriu sub forma $A \cap \bar{B} \cap C = \bar{D}$ ($\bar{B}$ și $\bar{D}$ sînt complementarele mulțimilor B și D). De aici rezultă ușor că $B \subseteq D$ și $\bar{C} \subseteq D$, adică... toți cei care *au* (adică B) și toți cei care *nu știu* (adică $\bar{C}$) *încearcă* (D). Pe o diagramă Euler-Venn orice elev din clasa a III-a poate rezolva problema. Dar nu orice elev din clasa a VI-a, să zicem, o poate înțelege la a doua lectură.

2. Nu te repezi la prima rezolvare care îți vine în minte. Majoritatea problemelor au mai multe rezolvări posibile și nu întotdeauna cea mai vizibilă este și cea mai simplă.

Ba chiar dimpotrivă. Probabil că funcționează și în rezolvarea de probleme o lege de conservare a energiei... mintale: cu cât ideea de la care pleci în rezolvare este mai ingenioasă, cu atât rezolvarea este mai ușoară. („Totalul energiei consumate pentru găsirea ideii de rezolvare și energiei consumate în timpul rezolvării este constant.”)

Exemplu: În pătratul $ABCD$ (figura 11.1) se duc din punctele C și D două drepte care fac unghiuri de 15° cu latura CD și se intersectează în punctul E . Să se arate că triunghiul ABE este echilateral.

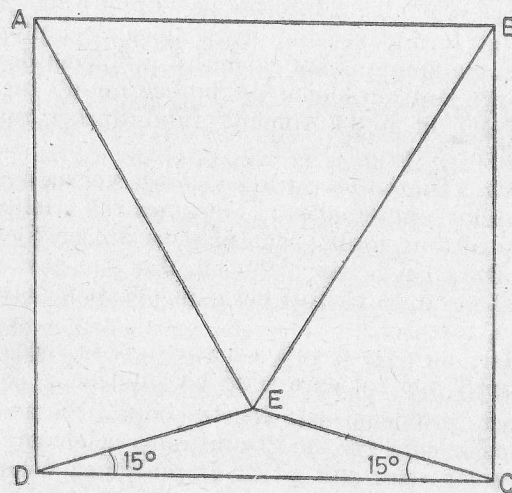


Fig. 11.1

Deoarece problema revine la rezolvarea de triunghiuri, ea se poate ataca, evident, trigonometric. Această idee este simplă, dar rezolvarea pe această cale este mai mult decât obositoare. Există o altă rezolvare — ceva mai scurtă decât cea trigonometrică — bazată pe construirea unor cercuri circumscrise triunghiurilor ADE și BCE . Probabil că mai există și alte rezolvări geometrice.

Putem însă consuma ceva mai multă energie la găsirea ideii de rezolvare. Să pornim invers. Construim triunghiul echilateral ABE și unim pe E cu D și cu C . Un calcul simplu ne indică faptul că unghiul EDC are 15° . Este clar că dacă triunghiul ABE nu este echilateral, atunci unghiul EDC nu va mai avea 15° . Triunghiul ABE trebuie deci să fie echilateral. Rezolvarea este (aproape) gata!

3. Dacă rezolvarea nu se întrevăde în întregime, atunci folosește metoda „ramifică și intersectează”: pleacă de la ipotezele problemei și derivează consecințe care par a se apropia de concluzie („ramifică”). Fă la fel plecând de la concluzie: construiește condiții suficiente pentru a obține concluzia și care par a se apropia de ipoteze. Se obțin astfel doi arbori, unul cu rădăcina în ipoteze și cu ramurile spre concluzie și unul cu rădăcina în concluzie. Când cei doi arbori se întâlnesc („intersectează”), rezolvarea este terminată. Desigur, rezolvarea este cu atât mai scurtă cu cât intuiția a direcționat mai bine cei doi arbori unul către celălalt.

4. Bazează-te pe necesitatea tuturor ipotezelor. În majoritatea problemelor școlare (compuse adică de cineva pentru altcineva) serioase (care cer o rezolvare, nu au intenția de a deruta), toate ipotezele sunt necesare pentru a obține concluzia. Pune deci în evidență toate ipotezele pe care problema ți le furnizează și folosește-le. Când te afli în impas, fă inventarul ipotezelor deja utilizate; de multe ori vei obține astfel ideea viitoarei „ramificări”.

5. Ori de câte ori se poate, folosește construcții grafice corecte. În general, este mai ușor să „vedem” pe o figură decât să ne imaginăm. Foarte multe raționamente, aparent de natură cu totul negeometrică, pot fi construite plecând de la figuri. Subliniez necesitatea construirii riguroase a figurilor (cu rigla și compasul atunci când este posibil). Pe figuri incorecte se pot „demonstra” tot felul de ghiduşii de tipul: „orice triunghi este isoscel”, „orice unghi este drept” etc. (vezi adevărurile „evidente” din paragraful anterior).

6. Atenție la operațiile pe care le folosești. Întreabă-te la fiecare dacă ai dreptul s-o efectuezi și în ce condiții. Ca și în cazul figurilor, „abuzuri” mici duc la consecințe foarte

mari. Există câteva reguli de algebră elementară („nu se împarte la zero“, „o inegalitate înmulțită cu un număr negativ își schimbă sensul“, „rădăcina pătrată dintr-un număr la pătrat dă modulul numărului“ etc.) pe care toată lumea le știe, dar uneori nu le aplică.

Exemplu: Să căutăm numerele reale a pentru care avem $ab + 1 - a > 0$, b fiind un parametru. Scriem succesiv

$$a(b - 1) + 1 > 0 \quad (\text{am dat pe } a \text{ factor comun}),$$

$$a(b - 1) > -1 \quad (\text{am trecut pe } 1 \text{ în membrul drept}),$$

$$a > \frac{-1}{b-1} = \frac{1}{1-b} \quad (\text{am împărțit la } b-1).$$

Dacă avem $b = 0$, atunci obținem $a > 1$. Să introducem $b = 0$ în expresia $ab + 1 - a$. Obținem $1 - a > 0$, de unde rezultă că $a < 1$, adică invers de cum am găsit mai sus.

Las în seama cititorului indicarea greșelii și a modului de evitare a ei.

7. Recitește și rafinează rezolvarea problemei. Se elimină astfel erorile de diferite feluri și se memorează (eventual) problema și „cheia“ rezolvării.

Exemplu. Afirmație: toate cărțile de joc dintr-un pachet oarecare au aceeași valoare.

„Demonstrăm“ afirmația prin inducție după n , numărul de cărți de joc din pachet. Dacă $n = 1$, atunci afirmația este adevărată. Presupunem afirmația adevărată pentru $n = 1, 2, 3, \dots, m$ și considerăm un pachet cu $m + 1$ cărți. Scoatem o carte x din pachet. Deoarece în pachet rămân m cărți, din ipoteza de inducție rezultă că ele au aceeași valoare. Introducem cartea x în pachet și scoatem o altă carte, y . Din nou pachetul rămas conține numai cărți de o singură valoare. Cartea x este acum în pachet (așa cum era mai înainte y), deci are aceeași valoare cu cărțile din pachet. Rezultă că și x și y au valori identice. Toate cărțile din pachetul cu $m + 1$ cărți au deci valori identice.

E clar, nu? E clar, dar nu este adevărat. Deci nu este nici corect. Într-adevăr, „demonstrația“ este corectă pentru $n = 1$ și pentru $n \geq 3$. Pentru a ajunge la 3 trebuie însă

să trecem pe la 2, iar pentru $n = 2$ raționamentul nu mai funcționează.

(Textul anterior trebuie recitit pentru a elimina greșelile din el, nu pentru a-l memora în vederea folosirii ideii de rezolvare la o altă problemă...)

8. Reamintește-ți probleme asemănătoare sau idei de rezolvare folosite altădată. Nu toate problemele sunt complet noi. În plus, există unele scheme de rezolvare cu aplicabilitate destul de largă.

9. Totuși, atenție la șabloane, unele pot să limiteze fantezia în loc să-ți ajute la rezolvare. Mai grav este faptul că multe șabloane sunt inconștiente, le avem, ne îngrădesc, dar nu le simțim prezența. Implicit, depășirea lor este o chestiune delicată, de inspirație de moment.

Exemplu: Din șase chibrituri să se construiască patru triunghiuri echilaterale egale (având laturile egale cu un chibrit).

Probabil că nu există nimeni care să nu încerce în fel și chip să așeze bețele pe o masă, să transpire fără a ajunge la vreun rezultat și apoi, sau să declare că problema nu are soluție, sau (mult mai puțin probabil) să încerce să rezolve problema în spațiu! Problemele cu chibrituri sunt pentru rezolvare pe masă, nu?... Șablonul este inconștient, dar foarte eficient.

10. Încadrează corect problema într-un domeniu matematic și, dacă este posibil, într-un capitol precizat. Majoritatea problemelor școlare permit acest lucru. Evită însă încadrările grăbite; recitește în acest sens sfatul numărul 2.

Exemplu. Fie axele Ox și Oy și un cerc cu centrul în origine și de rază r ; fie A intersecția cercului cu semi-axa pozitivă a axei Ox . La jumătatea segmentului OA (punctul D) se ridică o perpendiculară pe Ox care intersectează cercul în punctul B . Prin acest punct se duce o paralelă la axa Ox care va intersecta axa Oy în punctul C . Să se afle distanța de la punctul C la punctul D (figura 11.2).

Aparent, problema „ține“ de geometria analitică și formularea ei este „dirijată“ spre o asemenea impresie. Pe această cale, rezolvarea va dura 10–15 minute, deși problema se

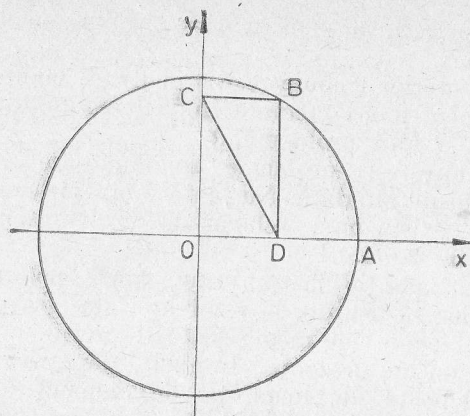


Fig. 11.2

poate rezolva în 10—15 secunde! Evident, *ODBC* este un dreptunghi și *DC* este egal cu *OB*, deci cu raza cercului.

$10 + 1$. Nu te baza prea mult pe „sfaturi pentru rezolvatorii de probleme”, indiferent cine ți le dă. Rezolvă singur probleme până ce ești în stare să-ți dai tu însuși asemenea sfaturi. Sfaturile pe care ți le dau alții sint utile, cele pe care ți le dai singur sint și necesare. Nici unele și nici altele nu sint însă suficiente... Succes!

12. DE LA GRAMATICA LIMBII LA GRAMATICA PROCESELOR ECONOMICE

„Ținem să atragem atenția asupra curioasei solidarități între adâncimea teoretică și eficiența practică așa de des verificată în matematică.”

Ion Barbu (*Versuri și proză*, Editura Minerva, București, 1970)

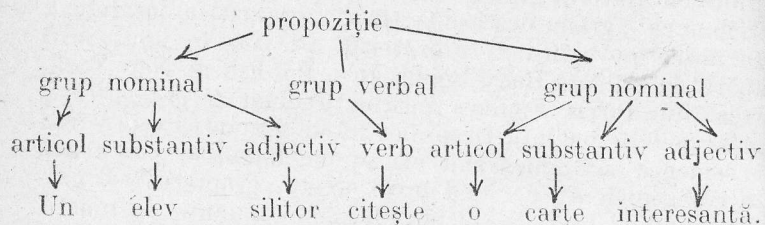
În dreptul cuvîntului „gramatică”, *Dicționarul limbii române moderne* precizează: „Ansamblu de reguli cu privire

la modificarea cuvintelor și la îmbinarea lor în propoziții”. Reținem de aici două aspecte: că o gramatică este asociată unei limbi naturale și că limba, construcțiile ei corecte sint definite cu ajutorul gramaticii. Au intrat însă în uzul curent sintagma ca: „gramatica arhitecturii”, „gramatica basmului”, „gramatica povestirii la prozatorul X”. Iar în anul 1978 a apărut la Editura Basic Books, Inc., Publishers, New York, cartea lui Davis Foulkes intitulată chiar *O gramatică a visului* (460 de pagini). Despre ce fel de gramatici este vorba în asemenea sintagme, sint ele simple metafore sau există și o corespondență de fond între aceste „gramatici” și gramatica limbii? Evident, răspunsul trebuie nuanțat în funcție de fiecare situație concretă în parte. Este însă clar că înțelesul noțiunii de gramatică a devenit mult mai larg decît cel prins în dicționarul amintit (și reconfirmat de *Dicționarul de neologisme*). În acest înțeles mai larg, o gramatică este un ansamblu de reguli care guvernează articularea corectă sintactic a componentelor unui domeniu dat (o limbă, o categorie de basme etc.).

În același timp însă, noțiunea de gramatică, prinsă în diferite încercări de modelare matematică, a căpătat precizări formale care au eliberat-o de concretețea domeniului căruia îi era asociată. S-a ajuns astfel la noțiunea de gramatică formală, obiect de studiu al unei discipline matematice de mare frumusețe și vigoare, teoria limbajelor formale.

Actul de naștere al acestei teorii a fost semnat la mijlocul deceniului al șaselea al secolului nostru de către lingvistul și matematicianul american Noam Chomsky, prin introducerea gramaticilor care astăzi îi poartă numele. Pentru a înțelege mai bine ce este o gramatică Chomsky, să considerăm cîteva propoziții în limba română și să ne interesăm de structura lor. Fie propozițiile: „Elevul citește.” și „Un elev silitor citește o carte interesantă.” Prima propoziție corespunde unei scheme foarte simple: subiect — predicat, subiectul fiind un substantiv, iar predicatul un verb simplu. A doua propoziție are o structură mai complicată, subiectul este urmat de un atribut, predicatul de un complement. Reținem schema „grup nominal — grup verbal — grup

nominal", ambele grupuri nominale fiind de forma „articol — substantiv — adjectiv”. Obținem astfel următoarea descriere arborescentă a structurii acestei propoziții:



Pe o asemenea schemă se pot construi multe alte propoziții asemănătoare. Astfel, „Un pescar voios a prins un pește uriaș.” este de aceeași formă, ca de altfel și propoziția „Un creion transcendent solfegiază o pionică verticală.” Absurdul ultimei înșirui de cuvinte vrea să semnaleze faptul că schemele arborescente ca cea de mai sus se referă numai la corectitudinea sintactică, formală, a frazelor și nu la cea semantică. Nu această delimitare ne interesează însă aici. Rămânând la nivelul sintactic, să remarcăm că în arborele anterior fiecare nod este marcat cu o categorie sintactică, exceptând nodurile finale care sînt marcate cu cuvinte, mai exact, chiar cu cuvintele care apar în propoziția în discuție. Dintre nodurile nefinale, rădăcina este marcată cu categoria cea mai generală, cea de propoziție, în timp ce categoriile asociate celorlalte noduri devin din ce în ce mai restrinse odată cu apropierea de nodurile finale. Să reținem, de asemenea, că trecerea de la un nivel al arborelui la cel inferior se face prin reguli care spun cu ce se înlocuiește categoria sintactică superioară în procesul construirii propoziției. Iată regulile folosite mai sus: *propoziție* → *grup nominal grup verbal grup nominal*, *grup nominal* → *articol substantiv adjectiv*, *grup verbal* → *verb*, *articol* → *un*, *articol* → *o*, *substantiv* → *elev*, *substantiv* → *carte*, *adjectiv* → *silitor*, *adjectiv* → *interesantă*, *verb* → *citește*. (Categoriile sintactice au fost scrise cursive, iar semnul → are semnificația „se înlocuiește cu”).

Evident, există fraze în limba română cu o structură mult mai complicată, fapt ce presupune existența unor reguli mult mai complicate. Pe de altă parte, să ne gândim, de exemplu, la fraza „Un elev silitor citește o interesantă carte.” O asemenea frază ar putea fi obținută din fraza anterioară folosind regula de inversiune: *substantiv adjectiv* → *adjectiv substantiv*. Noua regulă nu se mai referă la înlocuirea unei categorii sintactice cu un șir de categorii (sau cu un cuvânt terminal), ci la înlocuirea unui șir cu un alt șir.

Discuția anterioară ne-a condus în mod natural la desprinderea anatomiei și fiziologiei unei gramatici Chomsky. Într-adevăr, o asemenea gramatică este un cvadruplu format dintr-o mulțime de categorii sintactice, o mulțime de cuvinte (care apar în propoziții), o categorie sintactică distinsă, cea mai generală (categoria de *propoziție*) și o mulțime de reguli de înlocuire a unui șir de categorii sau cuvinte finale. Formal, se scrie $G = (N, T, S, R)$, unde cele patru componente corespund celor precizate anterior. Toate mulțimile N , T și R sînt finite. Regulile din R se scriu ca mai sus, adică sub forma $x \rightarrow y$, x și y fiind șiruri de elemente din N sau T . Dacă fiecare șir x se reduce la un element din N (o categorie sintactică), atunci gramatica G se numește independentă de context (rescrierea unei categorii depinde numai de ea însăși, nu și de contextul în care ea apare). De fapt, în funcție de forma regulilor, gramaticile sînt de patru tipuri (cu numeroase subtipuri): de tip 0 (fără restricții) de tip 1 (cu reguli care prin folosire nu micșorează lungimea șirului curent), de tip 2 (independente de context) și de tip 3 (mai restrictive decît cele independente de context). Am văzut cum generează o gramatică propoziții: se pleacă de categoria *propoziție* și se fac rescrieri repetate cu regulile gramaticii pînă se ajunge la un șir de cuvinte finale. Mulțimea tuturor propozițiilor generate în acest fel formează limbajul identificat de gramatica respectivă. Corespunzător celor patru tipuri de gramatici există deci patru familii de limbaje formînd șirul de incluziuni $\mathcal{L}_3 \subset \mathcal{L}_2 \subset \mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_0$ (figura 12.1). Acest șir poartă numele de ierarhia lui Chomsky.

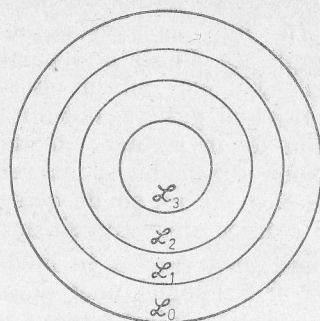


Fig. 12.1

Să subliniem faptul interesant că gramaticile de tip 0 sînt echivalente cu mașinile Turing (în sensul că identifică aceeași familie de limbaje), prin urmare, ele sînt un model al noțiunii de algoritm în forma cea mai generală cunoscută pînă acum (vezi și „Ce pot și ce nu pot face algoritmii“). Și celelalte tipuri de gramatici au asociate automate echivalente. Precizez numai că gramaticile de tip 3 corespund automatelor finite, unul dintre cele mai cunoscute și mai importante tipuri de automate.

Ocupîndu-se inițial cu studiul gramaticilor de tip Chomsky, teoria limbajelor formale a fost motivată în primii săi ani de studiul limbilor naturale, de problemele puse de aceste limbi. În treacăt fie spus, de gramaticile Chomsky au fost legate mari speranțe cu privire la traducerea automată, traducerea dintr-o limbă în alta însemnînd de fapt trecerea de la o gramatică la alta. Din păcate, gramatica unei limbi naturale nu poate fi scrisă complet ca gramatică Chomsky (de un tip ușor de manipulat), iar dimensiunea sintactică nu caracterizează complet o limbă. Speranța traducerii automate a fost pierdută în anii '70, dar se pare că va fi reluată cu iluzii redimensionate realist în anii care vin (mai ales sub impactul benefic al microprocesoarelor).

Adevărata dezvoltare a cunoscut-o însă teoria limbajelor formale în legătură cu evoluția informaticii, mai concret,

în legătură cu limbajele de programare evaluate. Într-adevăr, clasele sintactice (instrucțiuni și categorii de instrucțiuni) ale unui limbaj de programare de tipul Algolului pot fi formalizate cu ajutorul unei gramatici independente de context (amănunt care, împreună cu bogăția rezultatelor teoretice la care au condus, a făcut ca studiul acestor gramatici să fie foarte avansat), iar multe faze ale compilării pot fi realizate de către automate și translatoare studiate în teoria limbajelor formale. Cu această nouă și consistentă motivare, teoria limbajelor formale a ajuns în deceniul al șaptelea o teorie matematică bine conturată, cu probleme, metode și rezultate specifice, „cu calități estetice intrinseci, independente de motivările exterioare“ (Samuel Eilenberg în prefața cărții sale *Automata, languages and machines*, Academic Press, New York, 1974).

Între timp, tipurile de gramatici s-au diversificat. De pildă, în 1968, biologul (cu solide cunoștințe matematice) olandez Aristid Lindenmayer introduce „L sistemele“, modele generative ale creșterii biologice, adecvate mai ales studierii organismelor filamentoase. Un an mai tîrziu, profesorul Solomon Marcus definește *gramaticile contextuale*, modele ale unor fenomene intime limbilor naturale (dar nu numai acestora).

În primele ei două decenii, teoria limbajelor formale a mers deci în principal de la probleme către rezultate teoretice, de la motivări către rotunjirea formală, către „adîncirea teoretică“. Ultimii ani (și sînt sigur că tendința se va accentua) arată însă un fenomen complementar, acela de întoarcere spre aplicații, însă nu aplicații în legătură cu limbile naturale sau cu limbajele de programare, direcții clasice, ci în domenii dintre cele mai „nelingvistice“, cel puțin în aparență. Fenomenul poate fi exemplificat spectaculos cu aplicații în genetică, teoria codurilor, logica simbolică, documentare automată, muzicologie, teoria literaturii, teoria numerelor, geometria combinatorie, teoria acțiunii etc., domenii în care rezultate și tehnici specifice teoriei limbajelor formale au fost transferate cu mult succes. Teoria limbajelor formale, în general, lingvistica matematică, s-a constituit

astfel ca o veritabilă *știință pilot* în raport cu alte științe (vezi Solomon Marcus, „Linguistics as a pilot science“, în volumul *Current trends in linguistics*, 12, Ed. Thomas A. Sebeok, Mouton, The Hague, Paris, 1974). S-a ajuns astfel la „solidaritatea curioasă“ de care vorbea Ion Barbu, între „adîncimea teoretică“ și „eficiența practică“ a teoriei limbajelor formale. Solidaritate perfect explicabilă însă, firească chiar. Într-adevăr, este cunoscut faptul că, de regulă, cu cit o teorie (matematică) a ajuns mai abstractă, mai liberă de realitatea concretă care a motivat-o inițial, cu atît obiectele ei se pot regăsi în domenii mai îndepărtate. Structuri intime comune corespund unor fenomene dintre cele mai diferite în datele lor exterioare, specifice. Orice teorie care se ridică la studiul formal al unor asemenea structuri, indiferent de unde pleacă, poate apoi cobori spre toate domeniile în care se regăsesc structurile respective. Or, structura de limbaj, structura de șiruri formate din elemente primare în acord cu anumite reguli bine precizate (o gramatică), este comună multor fenomene umane, sociale și chiar naturale. Să ne gîndim, de pildă, la o acțiune simplă, aceea de a pregăti o cafea, să o „atomizăm“ (ca în secțiunea 9), adică să-i punem în evidență acțiunile elementare; acțiunile corecte vor fi atunci șiruri de asemenea acțiuni elementare. Aceste șiruri formează un limbaj, regulile de desfășurare corectă a acțiunii, scrise ca reguli într-o gramatică Chomsky, constituind gramatica acestui limbaj.

Universalitatea structurii de limbaj poate fi pusă în legătură cu premise cosmogonice fundamentale, aflate, ele sau negările lor, la granița literaturii științifico-fantastice. Într-adevăr, scurgerea liniară și uniformă a timpului implică necesitatea desfășurării liniare a evenimentelor (liniare în timp, ca succesiuni de evenimente elementare), deci posibilitatea perceperii liniare a lor. În plus, determinismul cauzal, determinarea viitorului de trecut (cel puțin cronologic, dacă nu intim, cauzal), furnizează reguli de desfășurare a evenimentelor, deci reguli de compunere a șirurilor de evenimente elementare. (În procesul pregătirii cafelei,

fiecare acțiune este bine precizată de cele anterioare ei.) Nu numai structura de limbaj, dar și cea de gramatică pare deci a fi universală. Evident, aici este vorba despre gramatici în general, deși N. Chomsky pledează pentru ipoteza că, de fapt, gramatica limbii este proiectată de creierul uman peste toate gramaticile cu care acesta lucrează, competența lingvistică fiind primordială în raport cu toate celelalte competențe (algoritmice) ale creierului. Teza este reluată și extinsă de profesorul Solomon Marcus, care postulează și exemplifică faptul că nu numai competențele individuale, ci și cele sociale sînt de tip gramatical. Toate aplicațiile teoriei limbajelor formale în domenii ne-lingvistice ilustrează și dau temei acestei teze.

După discuția anterioară nu trebuie să mai mire pe nimeni sintagma „gramatica proceselor economice“ prezentă în titlu. Domeniul economic este însă prin excelență domeniul eficienței concrete, măsurabile, de aceea întrebarea „la ce bun să asociem o gramatică (un automat sau un alt mecanism teoretic) unui proces economic?“ este nu numai naturală, dar chiar obligatorie. Răspunsul este deosebit de reconfortant. Teoria limbajelor formale este un instrument efectiv de rezolvare a unor probleme economice. În *Anti-Equilibrium* (Editura științifică, București, 1968), cunoscutul economist maghiar János Kornai spunea: „Este știut că în măsura în care comportarea unui sistem, șirul unor evenimente, pot fi descrise prin formalismul teoriei automatelor, devine posibilă simularea activității acestora cu ajutorul mașinilor de calcul. Teoria automatelor și limbajul simulării cu mașinile de calcul sînt strîns înrudite.“ Există o mare varietate de aplicații economice concrete ale teoriei limbajelor formale. De pildă, pe această cale pot fi rezolvate probleme de drumuri în grafuri (variante ale problemei clasice a voiajorului comercial cu restricții de timp și variante ale problemei livrărilor), probleme de triaje și de fire de așteptare, probleme de ordonanțare, se pot modela procese de producție sau se pot formula și rezolva probleme generale (dar cu consecințe metodologice practice în proiectarea și implementarea sistemelor informatice pentru

conducere), cum ar fi influența mărimii unității de timp utilizate (deci a gradului de agregare a informațiilor cu care se lucrează) asupra complexității modelării unui proces. (Amănunte pot fi găsite în lucrarea: Gh. Păun, *Mecanisme generative ale proceselor economice*, Editura tehnică, București, 1980.)

În încheiere, să subliniem actualitatea citatului din J. Kornai, în condițiile în care problema cibernetizării proceselor economice, a introducerii calculatoarelor în activitatea de conducere, devine tot mai acută. Teoria limbajelor formale poate să contribuie fructuos la rezolvarea acestei probleme. De altfel, în *Programul-directivă privind cercetarea științifică, dezvoltarea tehnologică și introducerea progresului tehnic*, adoptat la Congresul al XII-lea al P.C.R., pe lângă alte discipline matematice de mare tradiție și bine confirmată utilitate, se vorbește și despre intensificarea eforturilor de cercetare în tinăra (ca vîrstă), dar deja matura (ca rezultate) teorie a limbajelor formale. Eforturi care, sînt sigur, vor confirma așteptările.

Post scriptum. În limbajul cercetărilor operaționale (ca probabil în toate domeniile științifice) s-au încetățenit cuvinte, expresii, care în limbajul obișnuit au semnificații diferite și care pot naște zimbete vizavi de preocupările specialiștilor. (În algebră există, de exemplu, noțiunea de „corp plat”; cum vi se pare fraza: „ X s-a ocupat toată viața de corpurile plate...”?)

Astfel, cînd este vorba de problema voiajorului comercial, se înțelege de fapt o întreagă clasă de probleme care se reduce la o structură matematică comună și anume la modelul problemei voiajorului. În multe economii nici nu mai există meseria de voiajor comercial, unii oameni nici nu mai știu ce este acela un voiajor comercial. Și totuși problema cunoscută sub acest nume apare peste tot. Este vorba de fapt de căutarea celui mai scurt drum care trece cîte o singură dată prin localitățile unei regiuni precizate folosind o rețea precizată de drumuri. Asemenea probleme își pun poștașii, turiștii, bibliobuzele, mașinile de colectare a gunoiului urban, probleme similare apar în funcționarea utilajelor indus-

triale etc. Problema matematică-tip a căpătat o denumire nematematică, prima și cea mai sugestivă la care s-a gîndit cineva, numele problemei referindu-se de atunci la fondul ei și nu la forma concretă în care apare ea într-o situație sau alta.

13. TEORIA CATASTROFELOR ÎN TRE ENTUZIASM ȘI CONTESTARE

Puține teorii matematice au stîrnit atîta vîlvă într-un timp atît de scurt, mai exact, puține teorii au fost aplaudate atît de zgomotos, dar și criticate atît de virulent precum s-a întîmplat cu teoria catastrofelor. Teoria a fost fundamentată la începutul anilor '70, mai ales prin lucrările lui René Thom și E. C. Zeeman. Lucrarea de bază a teoriei este *Stabilité structurelle et morphogénèse* a lui R. Thom, apărută în 1972 la Editura Benjamin, Reading Massachusetts (în 1975 a reapărut la aceeași editură, în limba engleză, sub titlul *Structural stability and morphogenesis*).

Cîteva cuvinte despre René Thom: este născut în 1923 la Montbéliard, urmează Școala Normală Superioară, este doctor în matematici; a funcționat ca profesor la Facultatea de Științe din Strasbourg și la Institutul de Înalte Studii Științifice din Bures-sur-Yvette; în 1958 primește medalia Fields (echivalentul premiului Nobel pentru matematică) pentru lucrările sale în topologie și varietăți diferențiabile.

Motivele entuziasmului față de teoria catastrofelor sînt multiple. Să începem cu cel mai vizibil, numele. Puține teorii matematice au un nume atît de percutant. Cînd cineva aude de teoria potențialului nu înțelege mai nimic; la fel cu teoria grafurilor, cu teoria cîmpului etc. (Numele unor teorii pot crea și neînțelegeri. Pentru englezi, teoria grupurilor Lie a fost confundată cu „teoria grupurilor mincinoase”: în engleză *lie* înseamnă, printre altele, și a minți; de fapt, este vorba de teoria grupurilor continue, inițiată de către matematicianul norvegian Sophus Lie.) Cînd cineva aude

însă de „teoria catastrofelor“ imediat ciulește urechile. Sună cunoscut, sună interesant, se ține minte... Dacă s-ar fi spus, mai puțin inspirat, dar mai adecvat, teoria stabilității sau teoria discontinuității sau chiar teoria morfogenezei, atunci nu s-ar mai fi înțeles mare lucru și tentația dispărea.

Au existat apoi aplicații dintre cele mai interesante, atît prin obiectul lor, cît și prin concluzii. Modele ale războiului, ale cursei înarmărilor, ale exploatării (între persoane sau între națiuni), ale rușii stocurilor, ale prăbușirii podurilor și ale altor la fel de „diafane“ subiecte au impus rapid teoria catastrofelor ca instrument de modelare a unor fenomene care, într-adevăr, conțineau o nuanță mai mult sau mai puțin consistentă de catastrofă. Aplicațiile în ecologie, biologie, economie, politologie etc. păreau a consolida definitiv prestigiul acestei teorii abia născute.

Din punct de vedere matematic, teoria catastrofelor are toate caracteristicile unei teorii de mare interes și viitor (și chiar și adversarii îi recunosc împlinirea și frumusețea). În primul rînd, ea este puternic ancorată în geometria diferențială, teoria sistemelor dinamice, studiul suprafețelor etc., deci se articulează solid în peisajul existent. Teorema lui Thom, de clasificare a catastrofelor elementare, centrul întregii teorii, este de o dificultate și de o frumusețe matematică deosebite. Astfel că, deși nu împlinise încă un deceniu de existență, în 1979 teoria catastrofelor era deja inclusă ca domeniu separat în clasificarea pe care periodic Societatea Americană de Matematică o face ramurilor matematicii.

La crearea acestei explozii de interes în jurul teoriei catastrofelor au contribuit mult și „teoreticienii catastrofiști“ care au creat o imagine falsă în comunitatea matematică și în public privitor la puterea teoriei catastrofelor în științele sociale și ale naturii (Stephen Smale într-o recenzie apărută în „Buletinul Societății Americane de Matematică“, nr. 84, 1978, referitoare la cartea lui E.C. Zeeman *Catastrophe theory: Selected papers*, Addison Wesley, 1977).

Într-adevăr, iată cîteva afirmații de tip ziaristic legate de primele cărți de teoria catastrofelor (afirmațiile sînt preluate din recenzia amintită a lui St. Smale). În

octombrie 1974, în „L'Express“ se spunea că „noul Newton este francez“ (era vorba despre R. Thom). În 1977, într-o conferință a lui Zeeman la Northwestern University despre teoria catastrofelor se afirma că aceasta este „cea mai importantă descoperire matematică de la inventarea acum 300 de ani a calculului diferențial și integral“ (afirmație reluată în revista „Newsweek“). Zeeman însuși îl compară pe Thom cu Newton în volumul amintit mai sus, iar atunci cînd vorbește despre teorema de clasificare a catastrofelor elementare nu spune niciodată altfel decît „profunda teoremă a lui Thom“. Pe coperta din spate a traducerii engleze a cărții lui Thom apare un citat din „The London Time“ care afirmă că „într-un sens, singura carte cu care poate fi comparată (cartea lui Thom, n.n.) este «Principia» lui Newton“. Articole elogioase au apărut și în „New York Review of Books“, „Nature“, „The Times Higher Education Supplement“, „Scientific American“ etc.

Cu toate acestea (și probabil în oarecare măsură provocate tocmai de aceste afirmații apologetice), utilitatea teoriei pentru modelare, modelele deja construite pe această bază, relevanța însăși a teoremei lui R. Thom au constituit obiectul a numeroase și aspre critici. „Schimbarea la față“ a avut loc în anii 1977—1978, deși și mai înainte se auziseră voci sceptice în legătură cu această teorie. În revista „Science“, numărul din 15 aprilie 1977, Gina Kolata face o istorie a teoriei catastrofelor sub titlul „Catastrophe theory: The emperor has no clothes“ (Teoria catastrofelor. Împăratul este gol). Stephen Smale ține și el conferințe critice la Universitatea din Chicago încă din 1974, iar recenzia de care am mai amintit din „Buletinul Societății Americane de Matematică“ este și ea destul de rece.

Cei mai vehemenți critici ai teoriei catastrofelor au fost și rămîn însă Hector J. Sussmann și Raphael S. Zahler de la Rutgers University, New Brunswick, New Jersey, care, în 1978, publică articolul de exact 100 de pagini „Catastrophe theory as applied to the social and biological sciences: A critique“ (în revista „Synthese“, nr. 37), articol din care se extrag unele părți care apar apoi în revista „Be-

behavioral Science", 23, 1978, sub titlul „A critique of applied catastrophe theory in the behavioral sciences". Aceste ultime articole sînt atît de „rele", atît de catastrofal de critice la adresa (mai ales a) aplicațiilor pe care E.C. Zeeman le-a întreprins pe baza teoriei catastrofelor, încît nu mă voi putea opri să citez copios din ele cu cîteva rînduri mai încolo. Pînă atunci însă, să vedem cu ce se ocupă totuși teoria catastrofelor, atît cît se poate înțelege și atît cît se poate explica în cuvinte. În acest scop, voi folosi în mod esențial articolul lui Thomas J. Fararo, „An introduction to catastrophes", apărut în același număr din „Behavioral Science" ca și critica lui Sussmann și Zahler.

Cum am spus, teoria catastrofelor este concepută ca un instrument de analiză în teoria sistemelor dinamice. Un asemenea sistem este un proces determinist pentru care starea sa la un moment dat, împreună cu „intrarea" la acel moment (influența mediului asupra procesului), va determina complet starea procesului la momentul următor. Pentru exemplificare, să reluăm împreună cu Th. J. Fararo problema cunoscută sub numele de *problema lui Richardson*, referitoare la situația a două state pe care le preocupă chestiunea înarmării pentru „a face față" unul altuia. Ceea ce se dorește este deducerea politicilor de înarmare/dezarmare în funcție de anumite premise variabile, de anumiți parametri.

Problemei i se poate asocia un model dinamic în felul următor: ca în problemele din manualul de algebră, atașăm cîte o necunoscută „nivelelor de înarmare ale celor două țări", necunoscute pe care le presupunem însă variabile în timp. Evoluția în timp depinde de mai mulți parametri: comportarea statului advers, constringerile naționale, revindicările fiecărui stat etc. Simplificînd și idealizînd problema (așa cum face întregul model), să reținem numai acești parametri și să presupunem că ei variază liniar în raport cu nivelele de înarmare. Se obține astfel un sistem de două ecuații diferențiale liniare — pe care nu le mai scriu aici — și care depind de cei șase parametri aleși.

În mod tradițional, acum intră în funcțiune analiza calitativă a ecuațiilor diferențiale. Cu ajutorul ei poate fi

dedusă comportarea sistemului în funcție de valorile pe care le iau parametrii. În cazul nostru, valorile acestor parametri pot conduce la procese de dezarmare, la curse rapid ascendente de înarmare, la situații de echilibru etc., mai exact, pentru anumite valori ale parametrilor, răspunzînd unor relații precizate între aceștia, sistemul indică una sau alta dintre situațiile enumerate. Aceasta înseamnă că pentru regiuni bine delimitate din spațiul cu șase dimensiuni (sînt șase parametri), sistemul are comportări precizate. Ce se întîmplă însă la granițele acestor regiuni, în punctele, planele și hiperplanele de separare a lor? De o parte a acestor granițe comportarea sistemului este una, de partea cealaltă alta, cu totul diferită. În aceste locuri, analiza clasică a sistemelor dinamice nu mai poate da indicații suplimentare și aici intră în arenă teoria catastrofelor.

La unele dintre punctele, planele și hiperplanele de întîlnire a regiunilor de comportare omogenă, trecerea dintr-o regiune în alta se face lent; așa este trecerea de la echilibru la înarmare sau la dezarmare pentru sistemul anterior. Alta este situația în trecerea de la dezarmare la înarmare. Aici trecerea este abruptă nu numai din punct de vedere etic, politic, ci și matematic. Apar aici așa-numitele puncte de bifurcare a comportamentului, puncte a căror importanță nu mai trebuie subliniată. Exact de asemenea puncte (linii, suprafețe etc.) se ocupă teoria catastrofelor; aceste puncte sînt numite puncte-catastrofă și trecerea prin ele (a parametrilor sistemului) se numește eveniment-catastrofă.

Se observă deci că termenul „catastrofă" nu este folosit în înțelesul lui uzual, ci cu referire la o situație cînd comportarea unui sistem se schimbă brusc, cu salturi. Este ceea ce corespunde trecerii de la dezarmare la înarmare reciprocă, eventual excesivă, cu declanșarea mobilizării și a războiului în cazul modelului Richardson.

Teorema lui R. Thom, marea teoremă a teoriei catastrofelor, clasifică aceste catastrofe, iar rezultatul este remarcabil: în funcție de numărul parametrilor care determină comportarea unui sistem dinamic, există un număr bine determinat de *tipuri de catastrofe*. Astfel, la un singur para-

metru există un singur tip de catastrofă, un *punct de îndoire* (fold point), dacă sînt trei parametri, atunci pot apare *puncte, curbe și suprafețe de îndoire, puncte- și curbe-îrîf* (cusp point și cusp curve), precum și *puncte „coadă de rîndunică”* (swallowtail point) etc. De remarcă (și de reamintit peste cîteva rînduri, cînd va fi vorba de criticile ce se aduc teoriei catastrofelor, aplicațiilor ei, mai ales celor întreprinse de către E.C. Zeeman) că teorema lui Thom nu precizează *cîte* asemenea catastrofe apar într-un caz particular precizat, ci numai *ce fel* de catastrofe pot apare, dintr-un număr mic de clase bine definite.

Să privim mai îndeaproape o catastrofă. În cazul a doi parametri putem face chiar figuri tridimensionale care să reprezinte catastrofa și comportarea sistemului. Conform teoremei fundamentale, în acest caz vom întîlni catastrofe *punct-îrîf* (cusp point) și *curbe de îndoire* (fold curve). Comportarea sistemului în funcție de cei doi parametri va fi reprezentată de o suprafață în spațiul cu trei dimensiuni. Să privim figura 13.1, reprezentînd forma canonică a catastrofei *punct-îrîf*.

Mulțimea punctelor catastrofă în planul parametrilor (planul orizontal) este notată cu K . La traversarea acestei mulțimi, comportarea sistemului, figurată în „pînza” de deasupra planului parametrilor, face un salt. Iată, mergînd pe traiectoria T_1 în planul parametrilor, comportarea sistemului se deplasează lent în partea de jos a pînzei. La prima întîlnire a mulțimii punctelor-catastrofă nu se întîmplă nimic, sistemul rămîne în partea de jos a pînzei. La a doua întîlnire comportarea sistemului are însă un salt brusc de pe marginea îndoiturii pînzei pe pînza de sus. Aceasta este o catastrofă. Continuînd deplasarea pe traiectoria T_1 comportarea sistemului se va modifica lent mai departe. Invers, mergînd pe traiectoria T_2 , sistemul va coborî brusc de pe pînza de sus pe cea de jos în momentul celei de-a doua întîlniri a mulțimii K . Apare și aici un eveniment-catastrofă.

Să reținem în formularea lui Th. J. Fararo, op. cit., cele două direcții de bază în teoria catastrofelor: cea a lui Thom și cea a lui Zeeman. „Prin morfogenează, Thom înțelege schim-

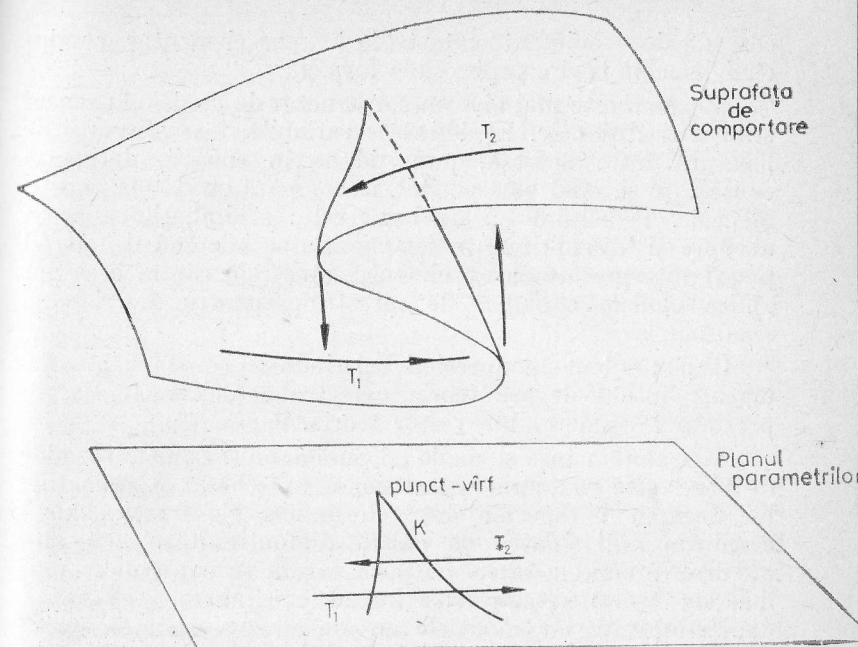


Fig. 13.1.

barea formei. Principiul de bază care guvernează abordarea lui Thom este acesta: orice morfogenează observabilă este un eveniment-catastrofă. În mod uzual, pentru Thom, *forma* este forma geometrică a unei entități în spațiu-timp. Evenimentul-catastrofă nu va corespunde de obicei unei singure catastrofe. Dimpotrivă, ideea este de a se construi un limbaj formal al morfogenezei, limbaj ale cărei unități sintactice, așa cum s-a văzut, sînt catastrofele elementare și ale căror fraze sînt compuneri sau concatenări în spațiu-timp ale acestor unități. Acest lucru subliniază semnificația catastrofelor elementare și în același timp ne reamintește limitarea acestora la reprezentări locale și nu globale. O imagine a unei asemenea catastrofe generalizate este o

cascadă de evenimente-catastrofă în sens elementar, conducând la schimbări complexe ale formei.“

„Zeeman este mai ales un constructor de modele în sensul științei tradiționale. El definește variabile, face afirmații de legătură între acestea, pune ideile în ecuații, derivează consecințe și, cînd este posibil, le compară cu datele experimentale. Principiul lui de bază este: schimbările aparent abrupte și discontinue în fenomenele sociale sau de alt fel pot fi interpretate ca evenimente-catastrofă cărora li se pot aplica modele canonice de catastrofe, pentru descriere și explicare.“

Deși prudent în aprecieri, referindu-se constant la afirmațiile altora despre teoria catastrofelor, Th. J. Fararo prezintă în general binevoitor teoria.

Să ascultăm însă și vocile lui Sussmann și Zahler. Teza lor de bază este că teoria catastrofelor în general și aplicațiile lui Zeeman în special sînt reformulări ale frazei „există discontinuități pentru că există discontinuități“, cu alte cuvinte, premisele însele pe baza cărora se construiesc modele de teoria catastrofelor includ presupunerea că există discontinuități, iar modelele nu fac altceva decît să spună din nou, pe o cale sofisticată, că există discontinuități.

Autorii analizează (mai bine spus, desființează) din această perspectivă modelul războiului propus de către Isnard și Zeeman într-o lucrare comună apărută în 1974 în volumul editat de L. Collins *Use of models in the social sciences*. Formularea vagă a ipotezelor poate fi precizată, în viziunea lui Sussmann și Zahler, în două moduri: un mod care nu are legătură cu teoria catastrofelor și unul care pur și simplu afirmă că există discontinuități. „Dacă ipotezele sînt luate în interpretarea totală, atunci suprafața-vîrf este în realitate o parte a ipotezelor și teorema lui Thom nu joacă nici un rol în deducerea ei (a suprafeței). Dacă se ia interpretarea parțială, atunci folosirea teoremei lui Thom este nelegală deoarece teorema nu implică ceea ce Isnard și Zeeman afirmă că ea face. În ambele cazuri, raționamentul este eronat.“ „Reamintim cititorului că folosirea teoremei

lui Thom este singurul pas netrivial din întreaga lucrare. Isnard și Zeeman își însoțesc demonstrația lor cu fraze inspirînd venerație: profunzime, unicitate matematică, stabilitate, teoreme adînci, universalitate, înțelegere. Ca într-o performanță de bun magician, cuvintele servesc pentru a ne îndepărta atenția de la prestidigitatia care se desfășoară. Mulți cititori sînt probabil intimidati de asemenea cuvinte astfel încît incorectitudinea matematică trece neobservată.“

Vehemența autorilor este atît de mare încît a le repeta cuvintele poate părea o birfă. Pe de altă parte nu am citit nicăieri o atît de dură luare de poziție împotriva unor aplicații ale matematicii. Chiar dacă asemenea lucruri se mai spun uneori, ele nu se scriu și chiar dacă se scriu nu se *tipăresc*. De data aceasta ele au fost nu numai tipărite, ci chiar *retipărite*.

Sussmann și Zahler își îndreaptă tirul mai ales împotriva aplicațiilor lui Zeeman, despre toate spunînd cam același lucru ca despre modelul anterior al războiului. Dar nici teoria catastrofelor ca atare nu le inspiră un entuziasm prea mare, mai precis, utilitatea acestei teorii li se pare aproape inexistentă pentru modelare. Teoria lui Thom este complet zdrobită de comparația cu teoria gravitației a lui Newton, de exemplu, în care pe baza unor ipoteze empirice se puteau deduce concluzii netriviale și de natură complet diferită de cea a ipotezelor. „Cum poate fi comparată teorema lui Thom cu exemplul teoriei lui Newton? În primul rînd, teorema lui Thom este valabilă pentru majoritatea familiilor de funcții. Ea nu implică ipoteze care să plaseze constrîngeri netriviale asupra funcțiilor, adică legi fizice. În al doilea rînd, clasa acelor suprafețe care apar în concluzia teoremei lui Thom este de nedistins de clasa tuturor suprafețelor.“ „Afirmația că teorema lui Thom poate fi folosită pentru a infera forma unei suprafețe pe baza cunoașterii ei parțiale este falsă.“

Un alt capăt de acuzare împotriva teoriei catastrofelor și a practicantilor ei este „afirmația repetată că teoria lor este mai degrabă calitativă decît cantitativă“ și asta ar fi un lucru bun, „dar care nu este înțeles în comunitatea știin-

tifică din cauza prejudecăților". Sussmann și Zahler demonstrează că 1) teoria catastrofelor nu este calitativă, ci cantitativă și 2) că nimeni nu a criticat teoria catastrofelor din cauza caracterului ei calitativ. „Teoria catastrofelor face un deserviciu acelor care doresc să dezvolte o știință a calitativului. În practică, teoria aplicată a catastrofelor folosește termenul de raționament calitativ ca o scuză pentru un raționament eronat.“

În finalul pledoariei lor, Sussmann și Zahler construiesc un model al războiului de numai câteva rinduri, compus din două inegalități și două egalități între variabile, nici măcar între funcții, și cu care ei obțin rezultate net mai relevante decât cele pe care Isnard și Zeeman le obțin cu ajutorul unui complicat și aproape incomprehensibil model de teoria catastrofelor.

Așa cum se întâmplă întotdeauna, probabil că adevărul se găsește și de data aceasta *in media res*, la mijlocul lucrurilor, nici entuziasmul necenzurat și nici negarea completă probabil că nu-și au obiect.

Matematicianul Martin Golubitsky își încheie astfel o recenzie la o carte de prezentare a unor aplicații ale teoriei catastrofelor: „Teoria catastrofelor a avut o perioadă de euforie inițială când matematicienii au fost curioși, iar nematematicienii au fost excesiv impresionați de ceea ce s-a afirmat despre ea. Mai târziu a existat o ripostă împotriva acestor extravagante și îndoiala a fost aruncată împotriva oricărei utilizări imaginabile a teoriei. Speranța mea este că înțelepciunea colectivă privind teoria catastrofelor se va dovedi elastică...“

Ultima afirmație dovedește că această înțelepciune există...

14. CÂTE PUNCTE ARE UN PĂTRAT?

Unul dintre cele mai intense șocuri intelectuale pe care le-am avut vreodată mi-a fost provocat de întrebarea „care dintre cele două segmente de pe tablă are mai multe puncte?“

Întrebarea mi-era pusă de către un asistent, eram în anul întâi de facultate; am privit candid cele două segmente, unul era de trei ori mai lung decât celălalt, deci de trei ori mai mare, conținea deci de trei ori mai multe puncte. Am răspuns ușor contrariat de simplitatea întrebării că acela, segmentul cel lung avea mai multe puncte. Asistentul n-a zis nimic, a unit capetele celor două segmente cu două linii pe care le-a prelungit apoi intersectându-le (fig. 14.1). M-a

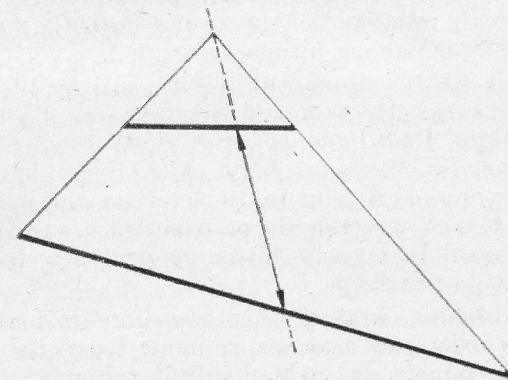


Fig. 14.1.

pus apoi să aleg un punct de pe segmentul cel lung. El a unit acest punct cu punctul de întâlnire al celor două drepte care uneau capetele segmentelor. Și atunci am înțeles. Fiecare asemenea dreaptă făcea ca unui punct de pe segmentul lung să-i corespundă un punct de pe segmentul cel scurt și această împerechere de puncte era biunivocă: la puncte diferite corespundeau puncte diferite și toate punctele de pe ambele segmente intrau în perechi. Cele două segmente aveau același număr de puncte! N-aș fi crezut-o, părea atât de contrar așteptărilor... Și totuși era clar, nu eram în stare să găsesc pe segmentul cel lung nici un punct căruia să nu-i corespundă un unic punct pe segmentul cel scurt. Deși, dacă suprapuneam segmentele, cel mic era cuprins de trei

ori în celălalt, deci cel mare avea puncte în plus. Avea puncte în plus, dar nu avea mai multe decât cel mic! Nu înseamnă că punctele de pe cel mic sînt mai înghesuite; ele puteau fi puse în corespondență cu punctele de pe segmentul cel mare, deci erau la fel de dense.

Eram pus în fața unui paradox al infinitului, paradox în raport cu intuiția curentă, finitistă, nu în sine. De fapt, aceasta este și definiția mulțimilor infinite: mulțimi care pot fi puse în corespondență biunivocă cu submulțimi propriu-zise ale lor (în matematică se spune curent, „submulțimi proprii“, prescurtîndu-se ultima sintagmă).

Probabil că în momentul acesta, cititorul își dă deja seama cam care este răspunsul la întrebarea din titlul secțiunii de față. De vreme ce orice două segmente conțin același număr de puncte, probabil că și oricare două pătrate conțin același număr de puncte. În ce relație stau însă punctele unui pătrat cu punctele de pe o latură a sa? Voi amina puțin răspunsul la această întrebare pentru a face cîteva precizări de terminologie.

Am vorbit de „numărul punctelor dintr-un pătrat“, dar, de fapt, nu există un asemenea număr. Este clar că sînt o infinitate de puncte, iar pentru infinit noi avem un singur semn, ∞ . Acesta este numărul? Într-un fel, da, dar ∞ nu este un număr ca toate numerele, el este un semn. Cu el nu putem face calcule. Care este rezultatul adunării $\infty + 7$? Dar al scăderii $\infty - \infty$? Dacă toate mulțimile infinite au ∞ de puncte, înseamnă că toate mulțimile infinite sînt egale, nu? Nu!

Hai-deți să arătăm că nu este așa. Să alegem o porțiune a mulțimii numerelor reale, de exemplu, toate numerele cuprinse între 0 și 1. Să numărăm aceste numere. Cum adică să numărăm? Păi, așa cum facem în fiecare zi: unu, doi, trei,... Orice numărătoare poate dura la infinit, deci mulțimea numerelor naturale $\{1, 2, 3, \dots\}$ este infinită. Să presupunem că am reușit să așezăm numerele cuprinse între 0 și 1, scrise ca fracții zecimale, unul sub altul, în ordinea numărătorii. Obținem un șir vertical de numere cu oricît de multe zecimale. (Obținem, de fapt, un pătrat nemărginit la dreapta

și în jos, fiecare linie a lui corespunzînd unui număr.) Acest șir nu poate conține toate numerele reale subunitare. Într-adevăr, iată un număr care nu a fost numărat: $x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$, construit astfel. Prima sa zecimală, a_1 , este diferită de prima zecimală a primului număr din șir, a_2 este diferită de a doua zecimală a numărului al doilea din șir, ..., a n -a zecimală a numărului x este diferită de a n -a zecimală a numărului aflat pe locul n în șir.

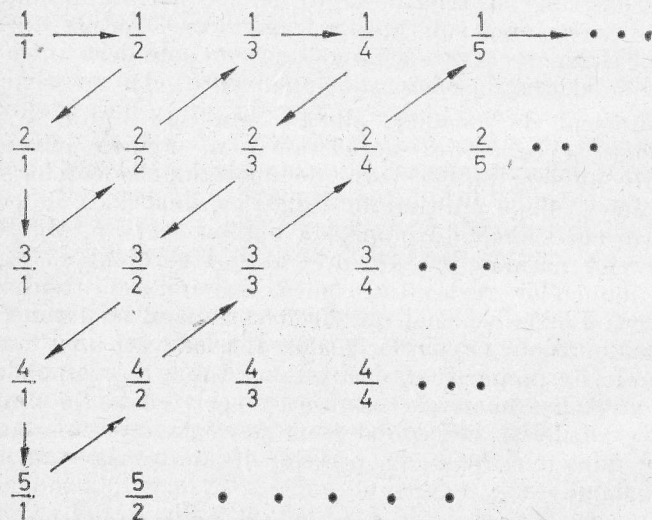
Numărul x nu poate fi în șirul nostru pentru că el diferă de toate numerele din șir cu cel puțin o zecimală (zecimalele de pe locul n diferă de zecimala de pe locul n a șirului de pe locul n).

Rezultatul merită a fi subliniat: deci mulțimea numerelor reale subunitare nu poate fi numărată, nu se poate stabili o corespondență biunivocă între mulțimea numerelor naturale și segmentul $(0, 1)$. Demonstrația anterioară aparține lui Georg Cantor, întemeietorul teoriei mulțimilor și este cunoscută sub numele de procedeu de diagonalizare (numărul x este construit cu referire la diagonală pătratului obținut prin scrierea unul sub altul a numerelor cuprinse între 0 și 1). Evident, în același mod putem considera orice alt segment al dreptei reale, nu numai pe $(0, 1)$.

Numărul de elemente dintr-o mulțime finită se mai numește și *cardinalul* acelei mulțimi. Pentru mulțimile infinite nu mai putem vorbi de numărul elementelor, dar se spune că două mulțimi au același cardinal dacă ele pot fi puse în corespondență biunivocă una cu cealaltă. Mulțimea numerelor naturale nu are deci același cardinal cu mulțimea numerelor reale (nici măcar subunitare). Cardinalul numărabil este deci mai mic decât cardinalul continuu (cardinalul mulțimii numerelor reale). Într-adevăr, orice număr natural este număr real, deci putem stabili o corespondență univocă între numerele naturale și cele reale (la numere naturale diferite corespund numere reale diferite, dar nu toate numerele reale au pereche în mulțimea numerelor naturale).

Apare aici o întrebare firească. Mulțimea numerelor raționale, care include mulțimea numerelor naturale, dar este

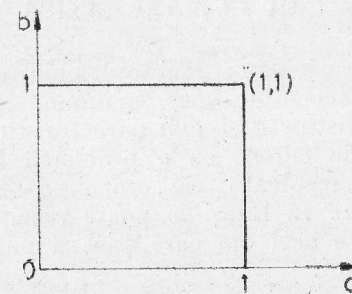
Este clar că tabelul obținut conține toate numerele raționale și nu numai o dată pe fiecare; diagonală conține,



108

Există mulțimi de cardinal intermediar între cardinalul mulțimii numerelor naturale și cel al numerelor reale? Ehei, dacă aș cunoaște eu răspunsul la această întrebare aș fi scris întreaga carte numai despre acest răspuns (vezi problema întâi a lui Hilbert, în secțiunea următoare).

Să considerăm un pătrat și anume, să ne fixăm asupra pătratului cu latura egală cu unitatea și format din toate punctele cu coordonatele cuprinse între 0 și 1. (Considerăm deci pătratul din figura 14.3, cu excepția laturilor sale.)



109

Fie A un punct în acest pătrat, avînd coordonatele $a = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$ și $b = 0, b_1 b_2 b_3 \dots$. Construim numărul $c = 0, a_1 b_1 a_2 b_2 \dots$. De exemplu, din numerele $a = 0,710\ 135\ 6\dots$ și $b = 0,433\ 197\ 2\dots$ obținem, prin intercalarea zecimalelor, numărul $c = 0,741\ 303\ 113\ 957\ 62\dots$. Dar, de fapt, ce am obținut în felul acesta? Unui punct din pătrat i-am asociat un punct unic de pe o latură a sa (numărul c este subunitar) număr care nu mai poate fi asociat și altui punct din pătrat. Am obținut o corespondență univocă între punctele din pătrat și punctele de pe o latură a sa. Cu alte cuvinte, cardinalul pătratului este mai mic decît cardinalul unei laturi. Dar latura este cuprinsă în pătrat. Cele două mulțimi de puncte au deci același cardinal. Pătratul conține la fel de multe puncte ca o latură a sa, iar aceasta la fel de multe cît orice segment. Orice segment, orice pătrat, orice figură geometrică ce conține cel puțin un segment de dreaptă sau curb este deci de cardinal continuu. Și nu numai figurile, ci și corpurile geometrice. De orice dimensiune. Așa cum s-a trecut de la pătrat la segment, la fel se poate trece de la cub la segment, sau de la un hipercub cu oricît de multe dimensiuni la segment. Cu infinitul nu-i de glumit... (Cu infinitul matematic; nu mă refer aici la „infinițurile” care apar în textele cîntecelor folk.)

15. PROBLEMELE LUI HILBERT ȘI ECOUL LOR ÎN MATEMATICĂ

Formularea de probleme, mai mult chiar decît rezolvarea acestora, este o activitate specific umană, este poate trăsătura cea mai distinctă și mai caracteristică a lui Homo Sapiens. Se spune curent că o problemă bine formulată este pe jumătate rezolvată, că „omenirea nu-și pune decît problemele pe care ea însăși le poate rezolva” (Marx), că un intelectual este acel om care știe să pună și mai ales să-și pună întrebări.

Matematica însăși este un corp de întrebări și de răspunsuri și chiar dacă în formă finală matematica pare a fi

formată numai din rezultate încheiate, finisate, din produse finite, dincolo de rezultate și înainte de ele au fost problemele, întrebările. Cînd aceste probleme se rezolvă imediat, ele nici nu se mai consemnează sau se consemnează în treacăt. Cînd se întîmplă însă ca o problemă să nu poată fi rezolvată mult timp sau chiar niciodată, atunci ea devine „problemă celebră”. Problemele geometriei antice (cuadratura cercului, dublarea cubului, triseccionarea unghiului), marea problemă a lui Fermat, ipoteza lui Goldbach, problema celor patru culori, sînt exemple de asemenea probleme. În aceeași listă pot fi incluse și cele 23 de probleme formulate de marele matematician german David Hilbert în fața Congresului internațional al matematicienilor din Paris, 1900.

În primul rînd, cîteva cuvinte despre Hilbert. S-a născut în anul 1862 la Königsberg și a murit în 1943 la Göttingen. Și-a susținut doctoratul în matematici la 22 de ani. A profesat la Königsberg, Zürich și Göttingen. Împreună cu A. Tarski este considerat întemeietorul meta-matematicii. Opere de bază: *Teoria corpurilor algebrice de numere* (1886); *Fundamentele geometriei* (1899), *Bazele logicii matematice* (1928), *Bazele matematicii* (1934 — 39; în colaborare).

Credința lui Hilbert era că în matematică nu există *ignorabimus*, că natura însăși a matematicii este de a pune și rezolva probleme. În acest sens, Hilbert a inițiat un program vast de formalizare a demonstrației matematice, program zădărnicit după cum am văzut, în 1931, de Kurt Gödel cu teoremele sale de imposibilitate a formalizării complete a aritmeticii. În termenii lui Hilbert, Gödel a demonstrat că, de fapt, întotdeauna în matematică există un *ignorabimus*.

Textul prezentat la Congresul matematicienilor de la Paris, din anul 1900, pe lîngă cele 23 de probleme pe care le voi enumera în continuare, conține și o introducere consistentă și de mare densitate aforistică. „Fiecare generație are problemele sale pe care generația următoare sau le rezolvă sau le înlătură ca lipsite de semnificație și le înlocuiește cu altele.” „Atîta timp cît o ramură a științei oferă

o abundență de probleme ea este viabilă.“ Citindu-l pe un „bătrîn matematician francez“, Hilbert spune mai departe: „O teorie matematică nu poate fi considerată completă atâta timp cât nu a devenit atât de clară încât să poată fi explicată primului om pe care îl întâlnești pe stradă“. (Iată că expresia „omul de pe stradă“ a fost rostită de mult timp și de către voci de mare rezonanță.) Mai departe, Hilbert pledează pentru formularea clară a unor probleme suficient de grele pentru a merita să te ocupi de ele cu garanția unor urmări pentru știință, dar nu imposibil de rezolvat. În orice caz, rezolvarea trebuie să fie riguroasă, mergând pînă la construirea ei „într-un număr finit de pași bazați pe un număr finit de ipoteze implicate în formularea problemei“. „Convingerea că orice problemă matematică este rezolvabilă este un stimulent puternic al cercetătorului. Auzim în noi chemarea continuă: iată problema. Caută-i soluția. O poți găsi prin raționament pur, în matematică nu există ignorabimus.“

În mai 1974, a avut loc la Universitatea din Illinois un simpozion dedicat consecințelor matematice ale problemelor lui Hilbert. Lucrările prezentate la simpozion au fost strînse în două volume, totalizînd peste 600 de pagini, apărute în 1976 sub egida Societății Americane de Matematică. Primul volum se deschide cu însuși textul lui Hilbert din 1900, urmat apoi de o listă de probleme ale matematicii anului 1974. Volumul include articole referitoare la fiecare dintre cele 23 de probleme ale lui Hilbert, cu excepția problemelor cu numerele 3 și 16.

Pentru a vedea în ce măsură problemele lui Hilbert au marcat dezvoltarea matematicii în prima jumătate a secolului nostru, voi prezenta pe scurt, în vorbe pe cît posibil, cîteva dintre ele și situația lor în anul 1974.

Prima problemă se referă la întrebarea dacă există mulțimi de cardinal intermediar între mulțimile numărabile și cele continue. (Presupun că cititorul a parcurs deja secțiunea 14, deci știe la ce mă refer.) Problema este cunoscută mai ales sub numele de ipoteza continuului și care afirmă că numărul cardinal al continuului (cardinalul mulțimii

numerelor reale) este cel mai mic cardinal strict mai mare decît cardinalul numărabil (cardinalul mulțimii numerelor naturale). Hilbert însuși a încercat în 1926 să-și rezolve problema, dar fără succes. În 1938, Gödel, același Gödel, a demonstrat rezultatul-surpriză că ipoteza continuului nu poate fi respinsă în cadrul axiomaticii Zermelo-Fraenkel pentru teoria mulțimilor (dacă această axiomatică nu este contradictorie). Mai mult, Gödel a făcut presupunerea că formalismul Zermelo-Fraenkel nu este suficient nici pentru a demonstra ipoteza continuului. În 1963, presupunerea lui a fost confirmată de către Cohen. În concluzie, problema lui Hilbert nu poate fi rezolvată nici afirmativ nici negativ în cadrul matematicii fundamentate pe teoria mulțimilor așa cum este ea axiomatizată de Zermelo-Fraenkel. Și totuși, rezultatele lui Gödel și Cohen rezolvă sau nu problema lui Hilbert? Întrebarea atinge chestiuni filozofice delicate, mergînd pînă la a contesta legitimitatea problemei lui Hilbert. Este ea o problemă de matematică sau nu? Pare clar că ea nu se referă la matematica *reală*, așa cum se face ea de cînd se face matematică și pînă acum, pentru că în cadrul acestei matematici problema este nedecidabilă, răspunsul la ea este independent de această matematică...

În orice caz, să remarcăm amprenta pusă de problema lui Hilbert pe numeroase cercetări de teoria mulțimilor, cercetări descurajate pentru aproximativ treizeci de ani de teorema lui Gödel din 1938 și relansate apoi de rezultatul lui Cohen. Cercetările din ultimul timp încearcă demonstrarea sau infirmarea ipotezei continuului, modificînd axiomatizarea Zermelo-Fraenkel, construind deci noi teorii ale mulțimilor.

Problema a doua a lui Hilbert se referea la fundamentarea axiomatică necontradictorie și completă a aritmeticii, problemă pe care Hilbert o dorea rezolvată afirmativ, credea în această alternativă, dar care a fost tranșată în modul în care am văzut de teoremele lui Gödel. Hilbert dorea eliminarea din matematică a noțiunilor infinitiste, neefective și construirea unei teorii a demonstrației care să obțină pe baze finitiste teoremele matematicii. Pentru unele

domenii, asemenea reconstrucții axiomatice au fost obținute (pentru geometrie, de exemplu).

Problema a treia a lui Hilbert se referea la „egalitatea volumelor a două tetraedre de baze și înălțimi egale”, dar problema a fost rezolvată chiar în 1900, înainte de publicarea intervenției lui Hilbert la Congresul de la Paris. Problema a patra se referea la geometriile în care liniile drepte sînt cele mai scurte ale spațiului respectiv (pe sferă, cele mai scurte linii sînt segmentele de cercuri mari!). Problema este legată de metricile Minkowski, folosite ulterior în teoria relativității. Următoarea problemă, a cincea, se referea la grupurile continue Lie și ea a fost rezolvată în 1952 (rezolvare simplificată de mai multe ori, dar încă rămasă complicată; „Ea este desigur o provocare la a-i găsi o demonstrație mai simplă.”; C.T. Yang, în volumul citat al Societății Americane de Matematică).

Să remarcăm aici că atît problema a treia cît și a patra au constituit obiectul separat al cîte unei cărți: V.G. Boltianski, *Hilbert's third problem*, Wiley, New York, 1978, respectiv, A.V. Pogorelov, *Hilbert's fourth problem*, Wiley & Holt, Rinehart & Winston, New York, 1979.

Problema a șasea cerea „să se trateze în același fel (ca geometria, n.n.), prin intermediul axiomelor, acele științe fizice în care matematica joacă un rol important, în primul rînd, teoria probabilităților și mecanica.” „Dacă geometria este luată ca model al tratării axiomelor fizicii, ar trebui să încercăm mai întîi, folosind un număr mic de axiome, să includem o clasă de fenomene fizice cît mai largă cu putință, apoi, adăugînd noi axiome, să ajungem în mod gradat la teorii mai speciale.” În secolul nostru, fizica a cunoscut două revoluții de anvergură, ambele fundamentate matematic, deci se poate spune că problema lui Hilbert nu mai este actuală (A.S. Wightman). Între timp, mecanica cuantică a fost axiomatizată, Hilbert însuși a lucrat mult la fundamentarea fizicii, teorii cuantice ale câmpului au fost de asemenea dezvoltate axiomatic.

Problema a șaptea a lui Hilbert are o formulare deosebit de simplă (într-o formă simplificată, ea întreabă dacă nu-

mărul 2^π este sau nu transcendent), dar nu a fost rezolvată decît în anul 1930 și a suscitat cercetări înrudite pînă în ultimii ani.

Să facem o precizare minimă a terminologiei. Am văzut că mulțimea numerelor raționale are cardinalul numărabil. Rezultă deci că mulțimea numerelor iraționale, cele care nu pot fi scrise sub forma a/b , a și b numere întregi, este de cardinal continuu. Un asemenea număr este $\sqrt{2}$, la fel este și π . Și totuși există o diferență între $\sqrt{2}$ și π . În timp ce $\sqrt{2}$ se poate obține ca rădăcină a ecuației $x^2 - 2 = 0$, numărul π nu este rădăcina nici unui polinom cu coeficienți raționali. Spunem că $\sqrt{2}$ este un număr algebric, iar π este un număr transcendent. Da, dar ecuațiile cu coeficienți raționali pot fi numerotate, deci formează o mulțime numărabilă, iar orice ecuație are un număr finit de rădăcini. Mulțimea numerelor algebrice este deci de cardinal numărabil, iar mulțimea numerelor transcendente este continuă. Acest rezultat, din nou uimitor, ca majoritatea rezultatelor legate de mulțimile infinite, aparține lui Cantor.

Să facem un pas de cîteva secole în urmă și să ne reamintim de problema cuadraturii cercului: cum se poate construi cu rigla și compasul un pătrat de arie egală cu cea a unui cerc dat? Deoarece în formula ariei cercului intră numărul π , problema revine la a construi cu rigla și compasul numărul π . S-a văzut între timp că numai numerele algebrice pot fi construite cu rigla și compasul. Problema transcendenței lui π a devenit astfel foarte importantă. Că π și numărul e (baza logaritmilor naturali) sînt numere transcendente s-a conjecturat însă pe la jumătatea secolului al XVIII-lea, dar abia în 1844 Liouville a arătat că există numere transcendente, iar în 1873 Hermite a arătat că într-adevăr numărul e este transcendent. În 1874 Cantor arată că există tot atît de multe numere transcendente cîte numere reale și abia în 1882 s-a demonstrat că și π este un asemenea număr (Lindemann). În 1900 nu se știa însă dacă „ex-

presia α^β pentru un număr algebric α și un exponent algebric irațional β , de exemplu numărul $2^{\sqrt{2}}$ sau e^π , reprezintă întotdeauna un număr transcendent sau cel puțin un număr irațional" (problema a șaptea a lui Hilbert).

Transcendența lui e^π a fost dovedită în 1929, iar cea a lui $2^{\sqrt{2}}$ în 1930 prin metode asemănătoare. Cercetări înrudite au condus la metode de a construi numere transcendente, folosind exponențieri, logaritmi etc. De asemenea, rezultate conexe au fost utile în găsirea limitelor între care se înscriu soluțiile ecuațiilor diofantice (ecuațiile cu coeficienți întregi și pentru care ne interesează numai soluțiile întregi). Iată, de exemplu, pentru frumusețea formulării, voi consemna că s-a arătat că orice soluție (x, y) a ecuației

$$y^2 = x^3 + k, k \geq 0,$$

satisface relația

$$\max(|x|, |y|) \leq e^\alpha,$$

unde

$$\alpha = (10^{10} k)^{10^4}.$$

Iarăși am ajuns să numărăm atomii din întreg Universul cunoscut și încă din citeva „lumi exterioare“!

Despre descoperitorul numerelor iraționale (făcea parte din școala lui Pitagora) se spune că ar fi pierit într-un naufragiu. Probabil că este vorba de o alegorie, un indiciu al șocului pe care l-au simțit anticii în fața descoperirii, un mod literar de a-l pedepsi pe descoperitor. Ar fi interesant de imaginat răspunsul la întrebarea: cum l-ar fi „pedepsit“ anticii pe cel care ar fi descoperit în aceeași vreme numerele transcendente?

Următoarele patru probleme se referă la teoria numerelor. Despre „misterioasele numere prime“ voi vorbi în altă parte, făcând acolo referiri la unele dintre aceste probleme.

Problema a zecea are formularea cea mai scurtă. Iată-o în întregime:

„10. Determinarea rezolvabilității unei ecuații diofantice

Dându-se o ecuație diofantică cu orice număr de necunoscute și cu coeficienți întregi, să se precizeze un proces

cu ajutorul căruia să se poată decide printr-un număr finit de operații dacă ecuația are soluții în numere întregi.“

Ceea ce cerea Hilbert era un algoritm care să spună dacă o ecuație diofantică arbitrară are sau nu soluții.

Problema a fost rezolvată complet — negativ — în anul 1970, prin eforturile conjugate ale multor matematicieni printre care trebuie amintiți Martin Davis, Julia Robinson și Yuri Matijasevič (ultimul a tranșat definitiv problema după ce ceilalți o reduseseră la cazuri particulare; Y. Matijasevič avea atunci 22 de ani! Se pare că tinerii au succes cu problemele lui Hilbert: în 1931, Gödel nu avea decît 25 de ani...)

La simpozionul de la Universitatea din Illinois, de această problemă s-au ocupat chiar cei trei matematicieni amintiți mai sus. Să remarcăm că rezultatele lor indică o legătură surprinzătoare între problema a zecea a lui Hilbert, unele probleme referitoare la numere prime, teoria algoritmilor, teoria modelelor, cu teoremele lui Gödel etc.

În legătură cu problema a zecea a lui Hilbert este interesant de subliniat că rezultatul de nedecidabilitate se referă la soluțiile întregi ale ecuațiilor diofantice, pentru soluțiile în numere raționale, problema fiind încă deschisă.

Pe de altă parte, o întrebare naturală este următoarea: unde sînt limitele decidabilității ecuațiilor diofantice? (care este gradul maxim și numărul maxim de necunoscute pentru care problema este decidabilă?)

Se cunosc următoarele rezultate:

- nu există algoritmi de decizie pentru ecuații diofantice cu 13 necunoscute;
- există asemenea algoritmi pentru ecuații cu o necunoscută și pentru unele forme particulare de ecuații cu două necunoscute;
- nu se știe aproape nimic despre cazul a trei necunoscute;
- ecuațiile de gradul doi în oricît de multe necunoscute sînt decidabile;
- ecuațiile de gradul patru sînt nedecidabile.

Probleme deschise:

— unde este limita decidabilității între 2 și 13 necunoscute?

— unde este limita decidabilității între gradele 2 și 4?

Aparent, limitele sînt foarte apropiate, regiunea a „ceea ce se poate face” este mult mai bogată decît cea a „ceea ce se poate face” și această afirmație poate fi întărită și cu referire la decidabilitatea altor probleme.

Fără a mai intra în detalii, voi nota doar că problema a 13-a (dacă ecuațiile de grad 7 pot fi rezolvate prin mijloace nomografice, adică prin suprapuneri de funcții continue de cel mult două variabile) a fost rezolvată tirziu, prin anii '60, iar problema a 14-a a fost rezolvată negativ în anul 1959.

Problema a 15-a cerea fundamentarea riguroasă a calculului enumerativ al lui Schubert, pe numele complet, Hermann Căser Hannibal Schubert. Acest calcul (dezvoltat în ultimele decenii ale secolului trecut) era un mod de a obține numărul de intersecții sau de puncte de tangență ale unor figuri geometrice așezate în diverse moduri în spațiu. De pildă, Schubert numărase 666 841 048 de suprafețe pătratice tangente în spațiu la nouă suprafețe pătratice și 5 819 539 783 680 de curbe cubice tangente la douăsprezece suprafețe pătratice date. (Numărul numerelor mari folosite de matematicieni este foarte mare!) După cum spune Steven L. Kleiman în articolul din volumul în discuție, „astăzi nu se poate garanta pentru acuratețea acestor numere spectaculoase, nici măcar nu știm dacă metoda lui Schubert este în mod fundamental corectă”. Deși s-au obținut rezultate serioase (în anii 1934, 1941, 1942) în această direcție, nu este totuși clar dacă problema lui Hilbert a fost sau nu complet rezolvată.

Problema a 17-a întreba dacă orice funcție cu valori pozitive (și cu coeficienți într-o mulțime precizată) poate sau nu să fie reprezentată ca suma pătratelor unui număr finit de funcții. Hilbert însuși demonstrase că există polinoame care nu pot fi scrise ca suma pătratelor unor polinoame reale. Efectiv, primul asemenea polinom a fost găsit în anul 1966 și el este

$$p(x, y) = 1 + x^2 y^4 + x^4 y^2 - 3x^2 y^2.$$

Problema lui Hilbert se referă deci la cazul în care printre funcțiile de reprezentare se admit funcții raționale (rapoarte a două funcții). În anul 1926, E. Artin a arătat că funcțiile reale pot fi scrise ca sumă de pătrate, dar pentru corpuri mai generale de numere problema are răspunsul negativ (D.W. Dubois, 1967).

Problema a 18-a a lui Hilbert este de fapt formată din trei probleme independente. Prima dintre ele a fost rezolvată în anul 1910. A doua se referea la posibilitatea de a acoperi spațiul euclidian cu poliedre congruente cu un poliedru dat avînd anumite proprietăți. Pentru spațiu, răspunsul (afirmativ) a fost dat în 1928, iar pentru plan în 1935. Două asemenea poligoane cu care se poate acoperi planul (cu figurile ca atare și cu copii congruente cu ele) sînt date în figura 15.1.

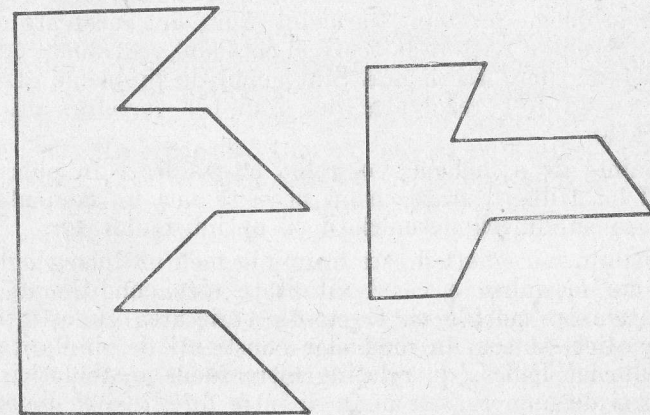


Fig. 15.1

Ultima parte a problemei întreba „cum se pot aranja în modul cel mai dens în spațiu o infinitate de solide egale, de o formă dată, de exemplu, sfere cu o rază dată”. Problema a fost rezolvată încă din vremea lui Gauss, deci cu un secol înainte ca Hilbert să o formuleze! Mai corect spus, încă

de pe vremea lui Gauss se credea că aranjarea cercurilor precum celulele în fagurii albinelor este cea mai bună acoperire a planului, dar demonstrația acestui fapt a fost dată abia în anul 1910 de Axel Thue și completată în 1940 de Fejes Tóth. Pentru spațiu, problema este încă nerezolvată.

Problema a 20-a se referea la rezolvarea unor probleme la limită pentru ecuații diferențiale și, după cum spune James Serrin, ea este una dintre cele mai bogate în urmări, de ea ocupându-se, în toată perioada scursă din 1900, foarte mulți matematicieni. „La fel ca multe altele din lista lui Hilbert, (problema) constă la fel de mult într-un program ca și într-o chestiune specifică, cerind un răspuns bine precizat, și exact în asta constă geniul și lărgimea orizontului lui Hilbert“.

Cuvinte similare sînt rostite la adresa problemelor a 22-a și a 23-a, ambele de mare răsunset în matematică și de același tip de probleme-program, care sînt și nu sînt rezolvate nici-odată, care dau naștere la teorii și care sînt reevaluate odată cu nașterea unor teorii noi. Sînt genul de probleme care și după ce au fost rezolvate încă mai cîr cercetări intense asupra lor.

Înainte de a încheia, voi relua cîteva fraze în plus din textul lui Hilbert, fraze ce nu necesită nici un comentariu în afara sublinierii actualității și optimismului lor.

„Știința matematicii este în opinia mea un întreg indivizibil, un organism a cărui vitalitate este condiționată de legătura între părțile ei. Cu toată varietatea cunoștințelor matematice, sîntem în mod clar conștienți de similaritatea procedurilor logice, de relațiile între ideile matematicii ca întreg și de numeroasele analogii între diferitele ei departamente.“

Unitatea organică a matematicii este inerentă naturii acestei științe, de aceea matematica este fundamentul tuturor cunoștințelor exacte despre fenomenele naturale. Pentru ca ea să-și poată pe de-a-ntregul îndeplini această misiune, fie ca noul secol să-i aducă maeștrii dotați și mulți discipoli zeloși și entuziaști.“

Urarea era rostită de Hilbert în anul 1900. Că el a fost un „maestru dotat“ este mai presus de orice îndoială. Dacă n-ar fi lăsat în matematică nimic altceva decît lista lui de 23 de probleme și istoria matematicii tot i-ar fi făcut loc în partea din față a ei. Cel puțin pentru că și-a făcut „mulți discipoli zeloși și entuziaști“.

16. COMPLEMENTARITATEA MATEMATICIANULUI

Judecînd fie și numai după varietatea problemelor formulate în 1900, fără a ne mai gîndi și la numărul domeniilor matematice în care el a avut contribuții de mare importanță și încă se poate aprecia că Hilbert era un matematician de mare întindere, că stăpînea în mare măsură întreaga matematică a vremii sale. Hilbert pleda chiar pentru posibilitatea cunoașterii extensive a matematicii. În finalul cuvîntului său în fața matematicienilor adunați la Paris în 1900, vorbind despre unitatea organică a matematicii, el spune: „Dar, ne întrebăm, odată cu extinderea cunoștințelor matematice nu va deveni în cele din urmă imposibil pentru un singur cercetător să se ocupe de toate ramurile acestui corp de cunoștințe? Pentru a răspunde, voi sublinia că este categoric înrădăcinat în matematică faptul că orice avans real merge mină în mină cu inventarea unor procedee mai precise și a unor metode mai simple, care ajută la înțelegerea unor teorii mai vechi și în același timp elimină fostele dezvoltări complicate. Prin urmare, este posibil pentru un cercetător, atunci cînd își însușește aceste procedee precise și metode simple să-și găsească drumul său mai ușor în ramurile variate ale matematicii decît în oricare altă știință.“

Viața și activitatea lui Hilbert sînt o dovadă a cuvîntelor sale. Să nu uităm însă că el le rostea în 1900 și că avea atunci 38 de ani.

Astăzi nu cred că cele spuse de Hilbert mai sînt valabile, în orice caz sînt mult mai puțin valabile. Matematica de astăzi este cu totul alta. În clasificarea făcută de Societatea

Americană de Matematică există aproximativ 3 600 de rubrici; iar o arie de cercetare matematică nu-și capătă loc în această clasificare decât la un grad de maturitate și de dezvoltare considerabile. Chiar apreciind că această clasificare este excesiv de precisă și reducând de 10 ori numărul de rubrici și încă numărul 360 rămâne respectabil.

Înseși „procedeele mai precise și metodele mai simple” de care vorbea Hilbert au devenit atât de „precise” încât de multe ori sînt în aceeași măsură „specifice”. Dezvoltată rapid pe orizontală, matematica s-a dezvoltat și pe verticală, fiecare dintre domeniile sale constituindu-și un corp de probleme, metode și rezultate proprii, bine conturate, cu o puternică notă caracteristică. Iar dezvoltarea curentă a matematicii, numărul de teoreme produse și publicate zilnic este atât de mare încît este nevoie de un efort considerabil pentru a te menține la curent cu noutățile. Apare astfel inevitabilă abordarea și aprofundarea domeniilor matematicii în adîncime, în dauna lărgimii. Se vorbește, de pildă, despre „specialiști în teoria modulelor”, „specialiști în teoria măsurii” și din ce în ce mai puțin despre „algebriști”, „analisti”, „geometri”.

Să consemnăm în acest context următoarea declarație a lui Ion Barbu, aflată la antipolul celei a lui Hilbert: „Un matematician determinat poate vorbi cu destulă competență doar despre sectorul unde o specializare nedorită, însă obligatorie, l-a zidit de timpuriu. Epoca matematicienilor generali, eclecticii, se așează mult înapoia noastră, în veacul al XVIII-lea.”

Ființa umană este însă în mod fundamental multilaterală. În principiu, un om ar putea face de toate (evident, între anumite limite de performanță; nu oricine poate sări peste doi metri înălțime, sau compune muzică de mare calitate etc.). Mediul de viață, școala (inclusiv învățămîntul superior) și profesia impun însă limitări drastice direcțiilor pe care trebuie să se dezvolte un om. Nici nu se poate altfel. Omul este multilateral ca potențialități, ca evantai de competențe; în planul performanțelor, el trebuie să *aleagă*, să meargă numai în anumite direcții. Apare astfel o contradic-

ție immanentă între specificul multilateral al esenței umane și realizarea socială, puțin-laterală, a omului. În cazul manifestării acute a ei, contradicția poate fi resimțită ca o veritabilă alienare a ființei umane, ca o amputare a personalității. De cele mai multe ori nu se ajunge însă pînă la sesizarea acestei stări de lucruri. Tensiunea contradicției semnalate se descarcă prin complementarizarea preocupărilor. Nu mă voi referi la această complementarizare la nivelul altor profesii, o fac destul psihologii și sociologii. Voi remarca doar cîteva direcții în care merg matematicienii, așa cum am văzut, foarte specializați, deci în mare pericol de „alienare”.

Prima formă de complementaritate este trecerea de la un domeniu matematic la altul, fenomen observabil la mulți matematicieni, necesar pentru evitarea „însingurării” în propria disciplină și util pentru creativitatea matematică însăși. Se știe că, venind „din afară”, cu alte șabloane decât cele locale, „amatorii” într-un domeniu au dat adesea rezultate surprinzătoare, pe care mai vechii practicanți al domeniului respectiv nu au reușit să le obțină. Poate așa se explică și abundența de tineri în istoria matematicii (de tineri care au rămas „tineri”, care chiar dacă au ajuns apoi iluștrii matematicieni în vîrstă, „marea lovitură” au dat-o la începutul carierei).

Observațiile anterioare nu implică neapărat vîrstă (fiziologică sau științifică), atât tinerii matematicieni, cît și cei maturi au tendința de lărgire a preocupărilor. Următoarele două direcții de complementarizare mi se par însă specifice mai ales tinerilor matematicieni. Este vorba în primul rînd de trecerea de la matematica așa-zisă „pură” (alteori numită, mai frumos parcă, „fundamentală”), la matematica aplicativă, aplicată chiar. Cunosc mulți tineri matematicieni, specializați în discipline teoretice de tipul algebrei, limbajelor formale, teoria funcțiilor recursive, logică etc. și care întreprind aplicații dintre cele mai concrete ale instrumentelor teoretice dezvoltate inițial din rațiuni estetice interioare teoriei matematice respective. Există o dublă determinare a acestei tendințe. Una vine din interiorul mate-

maticii, din necesitatea pe care fiecare matematician o resimte de a se confrunta cu realitatea extramatică, cu practica; cealaltă este legată de efervescența vieții științifice, tehnice, artistice, politice, pe care o cunosc zilele noastre, de problemele pe care această activitate imensă le pune în fața matematicii, în fața științei în general, de necesitatea implicării, a participării la acest proces.

În sfârșit, a treia tendință de complementarizare a tinărului matematician este aceea a îmbrățișării unor preocupări de tip esențial „umanist“, în sensul ciudatei clasificări școlare (deși tot ce este al omului este „uman“ și matematica în primul rând; cred însă că există o anumită gelozie ancestrală a filozofiei pe matematică: dezvoltându-se și specializându-se, matematica „face greutate“ filozofiei în încercarea ei de a cuprinde întreaga înțelepciune umană, de a subsuma cunoașterea umană, așa cum o făcea în antichitate, de exemplu. Și atunci, tot ce nu este filozofie — arta este și ea filozofie, filozofie epică, lirică, vizuală etc. — nu mai ține de „umanism“. Subtilă răzbunare...). Cunoște mulți matematicieni tineri care cântă, scriu muzică, scriu literatură (publicată, deci de calitate), pictează etc. Tendința ar părea spectaculoasă la prima vedere, dar ea este absolut firească dacă ne gândim la specificul esențial multidimensional al naturii umane de care vorbeam mai înainte și la faptul că „matematicile pun în joc puteri sufletești care nu sînt mult diferite de cele solicitate de poezie și de arte“. Există destul de multe cazuri în care scriitorul, de exemplu, supraviețuiește împreună cu matematicianul în același om, spre bucuria fiecăruia. Să ne gândim numai la autorul citatului anterior, matematicianul Dan Barbilian, unul și același cu poetul Ion Barbu.

17. CE SE POATE FACE CU UN POLINOM?

Multe, foarte multe lucruri se pot face cu un polinom, surprinzător de multe dacă ne gândim că polinoamele sînt funcții foarte particulare, de o formă bine precizată. De

pildă, dacă luăm în considerare numai polinoamele cu coeficienți întregi și cu valori de asemenea întregi, mulțimea lor este numărabilă, în timp ce mulțimea funcțiilor care duc numere întregi (chiar naturale) în numere întregi este de cardinal continuu. De asemenea, mulțimea polinoamelor reale este de cardinal continuu în timp ce mulțimea funcțiilor reale este de cardinal strict superior. (În general, mulțimea funcțiilor de la o mulțime A în ea însăși este de cardinal strict superior cardinalului lui A .)

În cele ce urmează, voi prezenta câteva „fapte diverse“ care dau consistență primei afirmații din această secțiune.

Pentru început, să ne reamintim teorema lui Stone-Weierstrass din analiză, de fapt, o consecință a ei: Orice funcție reală cu valori reale care este continuă poate fi aproximată (pe intervale închise și mărginite) oricît de bine cu un polinom. Cu alte cuvinte, dîndu-se o funcție continuă, oricare ar fi ea, oricît de complicată și de specială, pe porțiuni, valorile ei pot fi approximate oricît de bine dorim cu valorile unui polinom.

Într-o formulare mai exactă, teorema anterioară spune de fapt că pentru orice funcție continuă există un șir de polinoame care converg uniform („la fel în fiecare punct“) către funcție. Renunțînd la cerința de convergență uniformă, teoreme asemănătoare se pot demonstra (cu metodele inaugurate de către René Baire) și pentru unele funcții care nu sînt continue (funcții cu variație mărginită, funcții derivată etc.). În acest caz, convergența se face cu viteze diferite în puncte diferite. Sacrificînd însă unele puncte (în care convergența nu merge cum trebuie), putem obține aproximații prin polinoame chiar pentru funcții oarecare (teoremă obținută de către Sierpinski).

Deși formează o clasă mică, polinoamele sînt dense, sînt bine împrăștiate printre celelalte funcții, ajung în vecinătatea acestora oricît de aproape (pe intervale). Și, dacă ne aducem bine aminte, toate funcțiile trigonometrice pot fi reprezentate prin serii de puteri și approximate prin sume parțiale ale acestor serii (sume care sînt de fapt polinoame) și asemenea procedee există pentru a aproxima și alte funcții.

De pildă, să considerăm funcția „radical“, cea care duce orice număr x în rădăcina pătrată din x , $\sqrt{x}$. Pentru valorile subunitare a lui x , deci pe intervalul $[0, 1]$, această funcție poate fi aproximată cu polinoame obținute astfel.

Fie polinomul $p_0(x) = 0$ pentru orice x . Dacă polinoamele $p_0, p_1, \dots, p_n$ sînt cunoscute, atunci considerăm polinomul

$$p_{n+1}(x) = \frac{1}{2} (1 + x - (1 - p_n(x))^2)$$

Avem deci

$$p_1(x) = \frac{1}{2} x,$$

$$p_2(x) = \frac{1}{2} (1 + x - (1 - \frac{1}{2} x)^2) = x - \frac{x^2}{8}$$

și așa mai departe.

Aceste polinoame aproximează cu oricît de multe zecimale dorim pe $\sqrt{x}$; dacă dorim o aproximare mai bună nu avem decît să calculăm pe $p_n(x)$ pentru n mai mare și aproximarea ne aparține...

Să trecem acum în teoria numerelor. Iată două polinoame simple, dar cu proprietăți remarcabile:

$$\begin{aligned} p_1(x) &= x^2 - x + 41 \\ p_2(x) &= x^2 - 79x + 1641 \end{aligned}$$

Pentru orice $x = 0, 1, 2, \dots, 40$, primul polinom ia valori numere prime:

$$\begin{aligned} p_1(0) &= p_1(1) = 41, \\ p_1(2) &= 43, \\ p_1(3) &= 47, \\ p_1(4) &= 53, \\ &\dots\dots\dots \\ p_1(40) &= 1641, \end{aligned}$$

dar pentru $x = 41$ obținem $p_1(41) = 41^2$ deci generarea de numere prime încetează. Al doilea polinom este și mai

productiv: pentru orice x , număr întreg cuprins între 0 și 79, el generează numere prime, dar pentru 80 acest lucru nu se mai întîmplă.

Ne putem pune în mod firesc întrebarea dacă există polinoame care să genereze toate numerele prime. Răspunsul, oricît de neașteptat ni s-ar părea, este afirmativ. Pentru a-l prezenta va trebui însă să trecem în domeniul ecuațiilor diofantice și să ne referim din nou la problema a zecea a lui Hilbert, mai exact, la modul de rezolvare a ei.

Să considerăm un polinom în mai multe variabile, cu coeficienți întregi și să considerăm o parte dintre variabile ca necunoscute, iar pe celelalte ca parametri. Ne punem problema dacă există un sistem de valori (numere naturale) care asociate necunoscutelor să anuleze polinomul. Evident, anularea polinomului depinde de valorile parametrilor care intră în definiția lui, pentru anumite valori (sisteme de valori) ale parametrilor polinomul poate avea rădăcini, pentru alte sisteme de valori el poate să nu aibă rădăcini.

Pentru un polinom dat, să numim *mulțime diofantică* (asociată polinomului) mulțimea tuturor sistemelor de numere naturale care date ca valori parametrilor fac ca polinomul să aibă cel puțin o rădăcină. Orice polinom pune astfel în evidență o mulțime de n -upluri de numere naturale (am presupus că există n parametri în polinom).

Există o legătură absolut surprinzătoare între mulțimile diofantice și mulțimile pe care le pot recunoaște mașinile Turing, în general, pe care le pot identifica algoritmi. *Aceste două clase de mulțimi coincid.*

Să ne amintim din secțiunea 9 modul de funcționare al unei mașini Turing: se scria un șir de simboluri pe banda mașinii, mașina pleca din partea stîngă a șirului din starea inițială și mișca la stînga și la dreapta capul de citire-scriere, modifica simbolurile scrise pe bandă, modificîndu-și în același timp starea. Dacă mașina se oprea la un moment dat, nemaîavînd posibilități de mișcare, atunci se spunea că șirul scris inițial pe bandă este recunoscut de mașină. Mulțimile de șiruri care pot fi recunoscute de o mașină Turing poartă numele de *mulțimi recursiv enumerabile*.

Orice mulțime de n -upluri de numere naturale poate fi codificată ca mulțime de șiruri; de pildă, un n -uplu $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ poate fi codificat ca un șir de apariții ale simbolului 1, urmat de un 0, după care se scriu p_2 apariții ale simbolului 1 și așa mai departe.

Se poate vedea cu ușurință că orice mulțime diofantică este recursiv enumerabilă (se poate construi o mașină Turing care să calculeze valoarea polinomului; dacă ea este zero, atunci șirul care reprezintă n -uplul de intrare este recunoscut. În caz contrar, mașina nu se oprește.)

În 1970, Yuri Matijasevič a reușit să arate și relația inversă: orice mulțime recursiv enumerabilă este diofantică. Dându-se o mașină Turing oarecare, se poate construi un polinom (cu coeficienți întregi) astfel încât mulțimea diofantică identificată de polinom este identică — modulo o codificare adecvată — cu mulțimea șirurilor recunoscute de mașina Turing.

Iată că un polinom poate face teribil de multe lucruri, important este să fie folosit în mod potrivit!

Echivalența pusă în evidență de către Y. Matijasevič (conjecturată cu mai mulți ani înainte) a tranșat în sens negativ problema a zecea a lui Hilbert: să se găsească un algoritm (o mașină Turing, de exemplu) care să spună dacă ecuațiile diofantice au soluții. Într-adevăr, o ecuație diofantică are soluții dacă și numai dacă mulțimea diofantică asociată este nevidă. Orice mulțime recursiv enumerabilă este diofantică, deci dacă ar exista un algoritm pentru a decide dacă o ecuație diofantică are soluții, atunci acest algoritm ar da răspunsul și la întrebarea dacă o mulțime recursiv enumerabilă arbitrară este sau nu nevidă. Despre această ultimă problemă se știe însă că nu poate fi rezolvată algoritmic. (Am amintit de exemplu de problema corespondenței lui Post; mulțimea soluțiilor unei probleme Post este recursiv enumerabilă, dar am văzut că nu există un algoritm pentru a decide dacă problema lui Post are soluții sau nu.)

Să ne amintim că există un algoritm simplu pentru a calcula pătratele numerelor naturale, puterile lui 2, nume-

rale lui Fibonacci etc. Toate aceste mulțimi sînt deci recursiv enumerabile, deci toate aceste mulțimi sînt diofantice, pot fi identificate printr-un polinom. Tot recursiv enumerabilă este și mulțimea tuturor numerelor prime; și ea poate fi deci identificată printr-un polinom.

Atenție! Acum identificăm numerele altfel decît ca valori ale polinomului. Subliniez, într-o mulțime diofantică am inclus toate valorile date parametrilor și pentru care polinomul are rădăcini.

Și totuși: fie $p(a, x_1, x_2, \dots, x_n)$ un polinom cu parametrul a și variabilele $x_1, \dots, x_n$. Considerăm polinomul

$$q(z, x_1, x_2, \dots, x_n) = (z + 1)(1 - p^2(z, x_1, \dots, x_n)) - 1$$

Se vede imediat că dacă $p(a, x_1, \dots, x_n) = 0$, atunci $q(a, x_1, \dots, x_n) = a$, iar dacă $p(a, x_1, \dots, x_n) \neq 0$, atunci $1 - p^2(a, x_1, \dots, x_n)$ este sau egal cu 0 sau este strict negativ, deci $q(a, x_1, \dots, x_n)$ este strict negativ. Cu alte cuvinte, mulțimea diofantică identificată de polinomul p este egală cu mulțimea valorilor pozitive pe care le ia polinomul q atunci cînd $z, x_1, x_2, \dots, x_n$ iau valori naturale arbitrare. Mulțimile diofantice pot fi deci definite și cu ajutorul valorilor pozitive pe care le iau polinoamele cu coeficienți întregi. (Acest lucru a fost observat de către Hilary Putnam în 1960, deci cu 10 ani înaintea demonstrației lui Matijasevič; într-un fel, se găsiseră consecințe ale teoremei lui Matijasevič înainte ca ea să fie demonstrată.)

Există deci polinoame ale căror valori pozitive egalează mulțimea tuturor numerelor prime!

Primul polinom cu care s-au generat toate numerele prime aparține — ați ghicit! — lui Yuri Matijasevič și a fost construit în anul 1971. El avea 24 de necunoscute și gradul 37. Articolul în care acest polinom apărea a fost tradus în limba engleză în același an, prilej cu care polinomul a fost simplificat: variabile 21, grad 21. Cea mai economicoasă scriere a unui polinom cu care pot fi generate toate numerele prime implică 325 de simboluri și ea aparține lui J.P. Jones. Iată acest polinom (toate literele care apar sînt necunoscute):

$$(k + 2)(1 - ((az + h + j - q)^2 + (gk + 2g + k + 1) \cdot (h + j) + h - z)^2 + (16(k + 1)^3(k + 2)(n + 1)^2 + 1 -$$

$$-f^2)^2 + (2n + p + q + z - e)^2 + (e^2(e + 2)(a + 1)^2 + 1 - o^2)^2 + ((a^2 - 1)y^2 + 1 - x^2)^2 + (16r^2y^4(a^2 - 1) + 1 - u^2)^2 + (((a + u^2(u^2 - a))^2 - 1)(n + 4dy)^2 + 1 - (x + cu)^2)^2 + ((a^2 - 1)b^2 + 1 - m^2)^2 + (ai + k + 1 - b - i)^2 + (n + l + e - y)^2 + (p + l(a - n - 1) + b(2an + 2a - n^2 - 2n - 2) - m)^2 + (q + y(a - p - 1) + s(2ap + 2a - p^2 - 2p - 2) - x)^2 + (z + pb(a - p) + t(2ap - p^2 - 1) - pm)^2).$$

(Toate amănuntele legate de rezolvarea problemei a zecea a lui Hilbert și implicațiile ei sînt luate din articolul pe care M. Davis, J. Robinson și Y. Matijasevič l-au prezentat la simpozionul de la Illinois University din 1974.)

Îmi cer scuze cititorului pentru această pagină cu totul barbară. De altfel, în această secțiune am cam uitat că am promis o carte care se citește pe tren. Dar trebuie să recunoașteți că un polinom care generează toate numerele prime este un „animal” matematic cu totul remarcabil și pentru care merită să coborîm puțin din tren.

Pentru a îndulci puțin finalul, dați-mi voie să copiez aici o strofă dintr-o poezie de Eminescu:

Cu mine zilele-ți adaugi,
Cu ieri viața ta o scazi
Și ai cu toate astea-n față
De-a pururi ziua cea de azi.

Ar putea să pară fără legătură cu restul secțiunii și chiar este puțin. Și totuși, am pomenit ceva mai înainte de șirul lui Fibonacci (pe numele adevărat Leonardo da Pisa, secolul al XIII-lea). Acest șir

1, 2, 3, 5, 8, 11,...

în care orice termen (cu excepția primilor doi) este suma celor doi termeni anteriori, „modelează” înmulțirea iepurilor în felul următor: dacă avem o pereche de iepuri și dacă orice pereche de iepuri care are vîrsta de cel puțin un an va da naștere încă unei perechi de iepuri, atunci peste n ani vom avea atîtea perechi de iepuri cît arată termenul de rang n din șirul lui Fibonacci.

Într-adevăr, să figurăm cu un cerculeț o pereche de iepuri cu vîrsta sub un an și cu o steluță o pereche de iepuri maturi. Atunci evoluția numărului de iepuri este indicată de arboarele din figura 17.1.

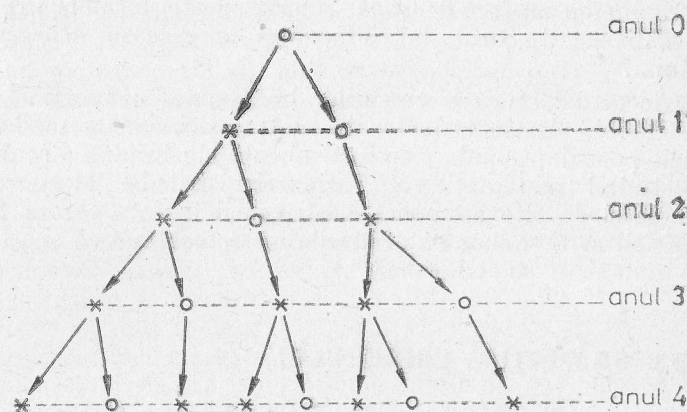


Fig. 17.1

Să notăm cu t_n termenul de rang n al șirului lui Fibonacci. Definiția șirului corespunde atunci relației

$$t_{n+1} = t_n + t_{n-1}, n \geq 2,$$

cu $t_1 = 1, t_2 = 2$. Să rescriem această relație astfel

$$t_{n+1} - t_{n-1} = t_n$$

Să revenim la strofa lui Eminescu și să recitim fiecare vers. „Cu mine zilele-ți adaugi”. Dacă azi sîntem în ziua n , atunci mine este ziua $n + 1$. Haideți să „adăugăm” „zilele de mine”, deci să le luăm cu semnul $+$. „Cu ieri viața ta o scazi.” Ziua de ieri este $n - 1$; să scădem „viața de ieri”. Obținem deci o expresie de forma

$$t_{n+1} - t_{n-1}$$

„Și ai cu toate astea-n față/ De-a pururi ziua cea de azi.“
 „Avem“ poate fi codificat cu semnul =, are același sens.
 „Ziua cea de azi“ este, evident, t_n . Prin urmare,

$$t_{n+1} - t_{n-1} = t_n$$

Eminescu nu face decît să „rescrie“ poetic formula șirului lui Fibonacci! Șirul lui Fibonacci modelează scurgerea vremii...

(Această lectură a versurilor lui Eminescu aparține lui Ion Rădoi, un tînăr doctor în matematici care a modelat rimele poeziilor populare cu instrumente algebrice, s-a ocupat de studiul matematic al variantelor baladei Meșterului Manole și de alte asemenea năstrușnicii în fața cărora Gr. C. Moisil ar fi exclamat: „Zidurile între matematică și științele umaniste sînt dărimate“.)

18. GRAMATICA CREIERULUI

Am vorbit undeva mai înainte despre acțiunea de a face cafea, despre limbajul asociat acestei acțiuni și despre gramatica limbajului, deci a acțiunii. V-ați întrebat vreodată cîte gramatici cunoașteți, cîte rețete de acțiune ați învățat și le folosiți zilnic? O listă a lor o să vă surprindă prin lungimea și varietatea ei. Să ne gîndim în primul rînd la folosirea diverselor aparate care ne înconjoară: telefonul, aragazul, liftul, televizorul, magnetofonul, automobilul, aspiratorul, stiloul, ceasul, să ne gîndim la toate obiectele pe care știm să le manevrăm, apoi la comportările diferite pe care le avem la masă, la teatru, în tramvai, la plimbare, în cele din urmă să ne gîndim la limbile și limbajele pe care le cunoaștem, limba maternă, una sau mai multe limbi străine, eventual limbaje de programare, FORTRAN, COBOL și altele, limbajul specific profesiei, limbajul gesturilor, limbajul semnelor de circulație etc. etc. Cunoaștem și folosim în mod curent zeci de gramatici pentru zeci de competențe în direcția cărora viața socială și individuală ne solicită și cu ajutorul cărora răspundem solicitărilor.

Să ne imaginăm o situație concretă. Vă aflați pe stradă, vă plimbați și nu vă gîndiți la nimic altceva decît că este primăvară, că au înflorit caișii, că — ciudat fenomen de mimetism — obrajii adolescentelor seamănă cu niște flori de cais, pe scurt, ați trecut în rezervă toate gramaticile pe care le stăpiniți, mai puțin una, cea care vă ajută să mergeți, să priviți, să țineți minile la spate. În acele momente se apropie de dumneavoastră un tînăr care are pe umăr o geantă pe care scrie „In love never say I'm sorry“. În acea clipă uitați de primăvară, de caiși și de petalele lor, citiți fără să vreți inscripția, pricepeți automat că este în engleză, chemați la lucru gramatica limbii engleze, decodificați expresia, vă reamintiți eventual de unde este luată și rămi-neți pregătit pentru a răspunde unei întrebări în engleză, pe care probabil o să v-o pună tînărul. Tînărul deschide într-adevăr gura și întreabă: „Dites-moi, s'il vous plait, où se trouve le restaurant le plus proche?“ De la primele cuvinte vă dați seama că tînărul vă vorbește în franceză. Activați atunci gramatica limbii franceze pentru a înțelege întrebarea și pentru a-i răspunde, timp în care gramatica limbii engleze este din nou „uitată“ și răspundeți.

Din toată discuția de pînă acum se ridică o serie de întrebări de mare interes privind funcționarea creierului uman. Cum poate creierul manipula atît de multe competențe, atît de multe gramatici? Cum sînt acestea „stocate“, cum sînt activate în momentul în care devin necesare? De ce nu încurcăm gramaticile între ele?

În cele ce urmează voi prezenta pe scurt un model care poate da răspuns la aceste întrebări (el apare în articolul „The universal grammar as a hypothetical brain“ de Cris-tion Calude, Solomon Marcus și Gheorghe Păun, „Revue Roumaine de Linguistique“, 5, 1979). Evident, modelul este o ipoteză privind funcționarea creierului uman și nu asupra alcătuirii lui; ceea ce interesează aici este modul în care creierul răspunde unor solicitări, ieșirile lui informaționale în raport cu intrările informaționale, cu alte cuvinte, ne preocupă creierul ca o cutie neagră al cărui conținut nu ne interesează. Modelul propus „mobilează“ această

cutie cu niște dispozitive lingvistice care funcționează precum creierul.

Modelul pleacă de la premisa că toate competențele umane (algoritmice) sînt de tip gramatical, nu în sens figurat, ci în propriu: toate competențele se bazează pe gramatici similare gramaticii limbii materne. Ipoteza este avansată de către Noam Chomsky și susținută și argumentată mult de către profesorul Solomon Marcus (a se revedea secțiunea referitoare la gramatica proceselor economice). Într-adevăr, gramatica limbii materne este prima care se învață (folosirea minilor ține de domeniul reflexelor), se învață cel mai timpuriu și rămîne activă chiar și atunci cînd nu este explicit folosită, atunci cînd alte gramatici sînt în funcțiune. Majoritatea gîndurilor sînt „vorbite”, puține dintre ele nu fac apel la cuvinte pentru a fi formulate.

Problema care se pune este deci de a vedea cum sînt stocate, folosite, activate și memorate din nou gramaticile care se găsesc în creierul nostru. Avem nevoie deci de o procedură de manipulare a gramaticilor, deci de o competență de ordinul al doilea care să gestioneze competențele de ordinul întâi, cele enumerate la început și altele asemănătoare.

O asemenea competență de ordinul al doilea poate fi imaginată ca o *gramatică universală*.

Cîteva cuvinte lămuritoare despre această noțiune. Am văzut că o gramatică constă, în esență, dintr-o mulțime de reguli cu ajutorul cărora se pot defini toate frazele corecte ale unui limbaj. Gramaticile generative introduse de către Noam Chomsky conțin în alcătuirea lor un vocabular de cuvinte terminale, un vocabular de categorii gramaticale, un simbol de start (categoria *propoziție*) și o mulțime de reguli de rescriere, indicînd perechi de porțiuni de fraze care se pot înlocui una cu cealaltă. O gramatică G generează astfel un limbaj $L(G)$, format din toate frazele peste vocabularul terminal care se pot obține plecînd de la simbolul de start prin folosirea regulilor de rescriere.

O gramatică universală este o gramatică fixată, mai precis, cu vocabularele și regulile de rescriere fixate, și astfel

încît dacă simbolul ei de start este înlocuit cu un *cod* asociat unei gramatici oarecare, atunci gramatica universală va genera exact limbajul generat de acea gramatică. Deci, punînd în gramatica universală U codul w_G asociat unei gramatici oarecare G , atunci gramatica $U(w_G)$ va funcționa astfel încît $L(U(w_G)) = L(G)$.

Există gramatici universale; o asemenea gramatică a fost construită de C. Calude și subsemnatul și ea poate constitui cheia modelării funcționării creierului. Într-adevăr, folosind o asemenea gramatică universală, nici nu mai avem nevoie să reținem în creier toate gramaticile competențelor particulare: ajunge să stocăm codurile lor și o gramatică universală care să le pună la lucru.

Putem merge cu economiile și mai departe. Păi, codurile gramaticilor sînt șiruri de simboluri. O mulțime de asemenea șiruri formează un limbaj. Este deci suficient să reținem gramatica acestui limbaj, o gramatică pentru a genera coduri de gramatici. O asemenea gramatică de gramatici împreună cu gramatica universală pot constitui scheletul întregii funcționări a creierului.

Iată modelul construit pe această bază (figura 18.1).

În creier există un *releu* care interceptează solicitările (informaționale) din partea mediului și activează *gramatica de gramatici*. Această gramatică generează un șir, cod al unei gramatici corespunzătoare unei competențe particulare. Solicitarea mediului este presupusă a sosi tot sub forma unui șir, a unei fraze într-un limbaj oarecare. Această frază împreună cu codul unei gramatici-competență ajung la un *analizor sintactic*. Acesta analizează fraza-stimul pentru a vedea dacă ea este corectă în raport cu gramatica indicată de cod, pentru a vedea dacă la acea competență se referă solicitarea externă. În caz negativ, generatorul de gramatici va produce un nou cod și analizorul sintactic încearcă să vadă dacă nu cumva aceasta este codul competenței căutate. Dacă pentru toate codurile răspunsul la această întrebare este negativ, atunci creierul nu va răspunde la stimulul exterior. (O întrebare în limba chineză are puține șanse să fie urmată de un răspuns în aceeași limbă și acest lucru

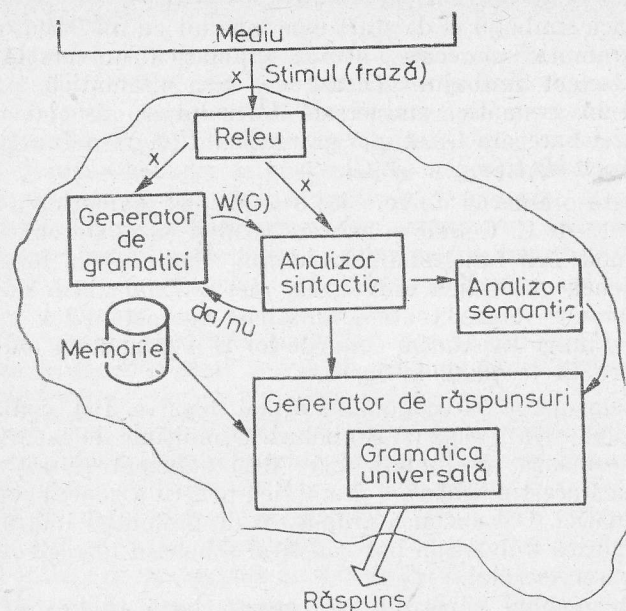


Fig. 18.1

este decis imediat de creier. Alteori „analiza” durează mai mult; dacă urcăm într-un automobil cu comenzile altfel decât le știm noi, vom încerca să-i aplicăm gramatica automobilului cunoscut, cu șanse de reușită, dar și de nereușită. La fel, gândiți-vă la acele jocuri mecanice care trebuie desfăcute sau compuse din bucățele și la care lucrăm destul de mult fără a reuși întotdeauna să ajungem la soluție, deși pentru un copil care cunoaște „gramatica” obiectului problema nu prezintă nici o dificultate.) Dacă la un moment dat se identifică gramatica în limbajul căreia este formulat stimulul exterior și în care trebuie dat răspunsul, atunci șirul de intrare și codul gramaticii merg în același timp la un *analizor semantic* și la *gramatica universală*. Gramatica universală se comportă acum exact ca gramatica asociată

competenței solicitate. Analizorul semantic scoate informația din stimul și împreună cu anumite *fișiere de memorie* furnizează toate datele necesare *generatorului de răspunsuri* pentru a da răspunsul adecvat. Piesa de bază a acestui generator de răspunsuri este gramatica universală, subliniez, actualizată acum ca gramatică a competenței active. Conversația cu mediul este acum directă, următorul stimul intrând direct în analizorul sintactic și în cel semantic pentru generarea răspunsului. (Întotdeauna, primele minute de conducere a automobilului sînt mai dificile, primele fraze într-o limbă străină se leagă mai greu etc.; pare a se confirma astfel ordinea operațiilor descrise mai sus.)

Așa cum am spus, gramatici universale au fost deja construite. Și celelalte părți ale modelului sînt ușor de realizat (generatorul de gramatici, de exemplu), există deja (analizorii sintactici sînt o problemă de bază a teoriei limbajelor formale, una din fazele compilării programelor de calculator fiind chiar analiza sintactică) sau constituie obiectul unor cercetări de mare actualitate (analizorii semantici). Modelul anterior poate fi deci realizat teoretic (ba poate chiar și practic; de fapt, modelul corespunde schemei generale a unui sistem de conversație cu un calculator electronic în una sau mai multe limbi naturale sau limbaje de programare. Așa cum există ele astăzi, calculatoarele sînt echipate cu un sistem de pornire — inițializarea sistemului de operare —, un sistem de operare care ține locul gramaticii universale, cheamă analizorii sintactici ai diferitelor limbaje de programare — păstrate sub formă de gramatici complete, nu sub forma unui cod — etc. Se pot face și alte identificări între componentele software-ului de bază și elementele modelului anterior.) Am ajuns astfel la o paralelă deloc surprinzătoare între inteligența umană și inteligența artificială, la un model matematic, formal, al unor sisteme complexe din ambele aceste delicate domenii. Studiul creierului pentru a perfecționa calculatoarele electronice (activitate ținînd de cibernetică) și studiul calculatoarelor pentru a înțelege și eventual perfecționa creierul (activitate de domeniul „anticiberneticii”, după expresia academicianului

O. Onicescu) sint într-adevăr probleme de mare importanță și actualitate și ambele direcții sint deja bine statornicite pentru cercetare.

19. LANȚUL MINCINOȘILOR SAU DESPRE LOGICĂ — MODEL AL GÎNDIRII

Să începem cu o problemă care justifică prima parte a titlului.

Ionel este întrebat ce notă are la matematică, 9 sau 10? El îi spune nota lui Costel, Costel lui Georgel, acesta lui Dorel, care îi comunică nota lui Viorel, Viorel i-o spune lui Cornel și de la acesta se află că Ionel are nota 10. Care este adevărata notă a lui Ionel, știind că:

1. Ionel sau Costel minte,
2. Georgel sau Dorel minte,
3. Viorel sau Cornel minte,
4. Ionel sau Georgel spune adevărul,
5. Costel sau Viorel spune adevărul,
6. Dorel sau Cornel spune adevărul.

Să încercăm să rezolvăm problema „în românește”, raționînd direct asupra ei. Pentru a afla nota lui Ionel trebuie să vedem cum a fost ea denaturată în timpul transmiterii de la Ionel la noi.

Să presupunem că Ionel a mințit. Conform condiției 4, rezultă că Georgel spune adevărul; din condiția 2 rezultă atunci că Dorel minte, prin urmare Cornel spune adevărul (condiția 6). Acest lucru implică faptul că Viorel minte (condiția 3); conform condiției 5, rezultă că și Costel spune adevărul. În concluzie, Ionel, Dorel și Viorel mint, iar Costel, Georgel și Cornel spun adevărul. Deoarece se fac trei mistificări ale notei, rezultă că nota reală este 9.

Dacă Ionel spune adevărul, atunci, din condiția 1, rezultă că Costel minte; conform condiției 5, Viorel spune adevărul. În consecință, Cornel minte (condiția 3), deci Dorel spune adevărul (condiția 6). În sfîrșit, condiția 2

implică faptul că Georgel minte. Din nou am obținut trei mincinoși: Costel, Georgel și Cornel. Și în acest caz nota reală este 9 și ea a suferit trei alterări.

În ambele situații rezultatul este același, deci nota lui Ionel este 9.

Raționamentul anterior a condus ușor la soluție, dar el este intim legat de formularea problemei, nu poate fi aplicat altor probleme de același tip. Se pune în mod firesc întrebarea dacă nu putem rezolva problema algoritmic, pe o cale generală, utilizabilă și în alte situații. Răspunsul este afirmativ și el implică folosirea unor elemente simple de logică matematică.

Să considerăm două propoziții logice, p și q , susceptibile de a fi adevărate sau false. Notăm cu 1 valoarea logică „adevăr” și cu 0 valoarea logică „fals”. Propozițiilor p și q le putem asocia propoziția-conjuncție „ p și q ” care este adevărată dacă și numai dacă ambele propoziții p și q sint adevărate și propoziția-disjuncție „ p sau q ” care este adevărată dacă și numai dacă cel puțin una dintre propozițiile p și q este adevărată. De asemenea, propoziției p îi asociem propoziția „non p ”, adevărată dacă și numai dacă propoziția p este falsă. Voi nota cu $\wedge$ conectorul „și”, cu $\vee$ conectorul „sau” și voi scrie $\bar{p}$ în loc de „non p ”. Tabelul următor precizează valoarea de adevăr a propozițiilor compuse $p \wedge q$, $p \vee q$, $\bar{p}$ în funcție de valoarea de adevăr a propozițiilor p și q .

p	q	$\bar{p}$	$p \wedge q$	$p \vee q$
0	0	1	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	0	1	1

Operațiile logice $\wedge, \vee, -$ au o serie de proprietăți; unele ne vor folosi în rezolvarea problemei, de aceea le voi preciza în continuare. Să notăm cu $\equiv$ relația de echivalență logică, adevărată pentru perechi de propoziții compuse care au aceeași valoare logică pentru valori de adevăr identice ale propozițiilor elementare care le compun. Atunci, oricare ar fi propozițiile p, q și r , avem echivalențele:

1. $p \wedge \bar{p} \equiv 0$ (principiul non-contradicției),
2. $p \vee q \equiv q \vee p, p \wedge q \equiv q \wedge p$ (comutativitate),
3. $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r, p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$ (asociativitate),
4. $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r), p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ (distributivitate),
5. $p \vee \bar{p} \equiv 1$ (principiul terțului exclus),
6. $0 \vee p \equiv p, 1 \wedge p \equiv p, 0 \wedge p \equiv 0, 1 \vee p \equiv 1$.

Există multe alte asemenea proprietăți ale operațiilor logice. Pentru o introducere riguroasă în logica matematică elementară cititorul poate apela la Gr. C. Moisil, *Elemente de logică matematică și teoria mulțimilor*, Editura științifică, București, 1968.

Să revenim la problema celor șase elevi suspecti de a fi mincinoși și să considerăm propozițiile elementare p, q, r, s, u, v , afirmind că Ionel, Costel, Georgel, Dorel, Viorel și, respectiv, Cornel mint. Cu ajutorul acestor propoziții, enunțul problemei se rescrie sub forma unei conjuncții de disjuncții. Într-adevăr, afirmația „Ionel sau Costel minte” se rescrie ca $p \vee q$, a doua afirmație conduce la $r \vee s$ etc. Ultima afirmație este codificată sub forma $\bar{s} \vee \bar{v}$. Problema revine deci la a găsi valorile de adevăr ale propozițiilor p, q, r, s, u, v astfel încât propoziția

$$t \equiv (p \vee q) \wedge (r \vee s) \wedge (u \vee v) \wedge (\bar{p} \vee \bar{r}) \wedge (\bar{q} \vee \bar{u}) \wedge (\bar{s} \vee \bar{v})$$

să fie adevărată. Procedul prin care putem face acest lucru este aducerea propoziției compuse t la forma normală disjunctivă, adică la o disjuncție de conjuncții. Fiecare conjuncție adevărată va da o soluție a problemei. Trecerea la forma normală disjunctivă se poate face folosind proprie-

tățile 1—6 puse în evidență mai sus. Iată câțiva pași ai acestui calcul:

$$\begin{aligned} (p \vee q) \wedge (r \vee s) &\equiv ((p \vee q) \wedge r) \vee ((p \vee q) \wedge s) \equiv \\ &\equiv ((p \wedge r) \vee (q \wedge r)) \vee ((p \wedge s) \vee (q \wedge s)) \equiv \\ &\equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (q \wedge s), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Analog, } t_1 = (p \vee q) \wedge (r \vee s) \wedge (u \vee v) &\equiv (p \wedge r \wedge u) \vee \\ &\vee (p \wedge r \wedge v) \vee (q \wedge r \wedge u) \vee (q \wedge r \wedge v) \vee (p \wedge s \wedge u) \vee (p \wedge s \wedge v) \vee \\ &\vee (q \wedge s \wedge u) \vee (q \wedge s \wedge v). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{De asemenea, } t_2 = (\bar{p} \vee \bar{r}) \wedge (\bar{q} \vee \bar{u}) \wedge (\bar{s} \vee \bar{v}) &\equiv (\bar{p} \wedge \\ &\wedge \bar{q} \wedge \bar{s}) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge \bar{v}) \vee (\bar{p} \wedge \bar{u} \wedge \bar{s}) \vee (\bar{p} \wedge \bar{u} \wedge \bar{v}) \vee (\bar{r} \wedge \bar{q} \wedge \\ &\wedge \bar{s}) \vee (\bar{r} \wedge \bar{q} \wedge \bar{v}) \vee (\bar{r} \wedge \bar{u} \wedge \bar{s}) \vee (\bar{r} \wedge \bar{u} \wedge \bar{v}). \end{aligned}$$

Continuând, vom obține disjuncția a $8 \times 8 = 64$ de conjuncții de forma $x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4 \wedge x_5 \wedge x_6$ cu x_i în mulțimea $\{p, q, r, s, u, v, \bar{p}, \bar{q}, \bar{r}, \bar{s}, \bar{u}, \bar{v}\}$ pentru orice i . Să observăm însă că orice conjuncție $x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_6$ ca mai sus are valoarea logică 0 dacă există $i \neq j$ astfel încât $x_i = x_j$. Există multe asemenea situații. De exemplu, conjuncția $p \wedge r \wedge u$, aflată pe primul loc în subpropoziția t_1 , în conjuncție cu oricare conjuncție din subpropoziția t_2 conduce la conjuncții $x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_6$ care conțin sau pe $p \wedge \bar{p}$ sau pe $r \wedge \bar{r}$. Toate aceste conjuncții pot fi eliminate din forma normală disjunctivă (folosim proprietatea 6). După toate eliminările de acest fel ajungem la relația

$$i = (q \wedge r \wedge v \wedge \bar{p} \wedge \bar{s} \wedge \bar{u}) \vee (p \wedge s \wedge u \wedge \bar{r} \wedge \bar{q} \wedge \bar{v}).$$

Cu alte cuvinte, revenind la semnificația notațiilor p, q, r, s, u, v , sînt posibile două situații: sau Ionel, Dorel și Viorel mint (p, s, u sînt adevărate), sau mint Costel, Georgel și Cornel (q, r, v sînt adevărate). Am regăsit soluția euristică de la începutul discuției. (De fapt, nota lui Ionel se putea deduce mai devreme, pe baza observației că nu pot exista decît trei mincinoși; numărul mincinoșilor contează, nu și cine sînt aceștia.)

Se impun aici cîteva observații. Cele două rezolvări anterioare constituie o bună ilustrare a afirmației că „logica matematică este un model al gândirii umane”. Deși, evident,

ea este mai „frumoasă“, rezolvarea directă corespunde unui calcul implicit identic celui parcurs în etapa a doua. Acest lucru nu este vizibil deoarece procedura euristică a mers direct la țintă, eliminând... conjuncțiile false direct, pe baza intuiției și înțelegerii globale a problemei. Dezavantajul pe care îl are calculul logic de a fi atît de laborios se datorează tocmai caracterului său mecanic, independent de problemă. Aceeași cauză are însă și un efect pozitiv: problema poate fi rezolvată mecanic la modul propriu, adică pe un calculator. Evident, atunci dificultatea revine la scrierea programului de rezolvare. Aceasta este însă altă problemă.

Să considerăm încă două probleme cu mincinoși. (Nu trebuie în nici un caz să se rețină de aici că logica matematică nu are alt scop decît demascarea mincinoșilor; ea nici nu-și propune, de fapt, asemenea proiecte ambițioase.)

Prima problemă este următoarea: *A* spune că *B* minte, *B* spune că *C* minte, *C* spune că *A* sau *B* minte. Cine minte și cine nu?

Alegerea soluției (în premisa că ea este unică) trebuie făcută din cele $2^3 = 8$ situații care pot apare (vezi tabelul următor, în care 0 și 1 au semnificații de valori de adevăr pentru propozițiile spuse de către *A*, *B* și *C*).

<i>A</i>	0	0	0	1	0	1	1	1
<i>B</i>	0	0	1	0	1	0	1	1
<i>C</i>	0	1	0	0	1	1	0	1

Evident, nu are rost (și nici haz) să încercăm fiecare dintre aceste variante. Chiar dacă pentru cazul anterior acest lucru este posibil, dacă mulțimea mincinoșilor ar fi mai mare, atunci acest lucru n-ar mai fi ușor de realizat; 2^n crește foarte repede atunci cînd crește n . Să încercăm o rezolvare ad-hoc, pe problemă, după care vom apela din nou la logica matematică. *A* spune că *B* minte; dacă *A* spune adevărul

atunci cînd face această afirmație, atunci într-adevăr *B* minte. Dacă însă *A* minte, atunci *B* spune adevărul. În ambele situații *C* spune adevărul atunci cînd afirmă că *A* sau *B* minte. Rezultă că *B* minte și de aici rezultă că *A* spune adevărul.

Să notăm acum cu a , b , c propozițiile spuse de *A*, *B*, respectiv de către *C*. Ținînd seama de formularea problemei (de relațiile între propoziții), obținem formula următoare:

$$(a \wedge b \wedge c \wedge \overline{(a \wedge b)}) \vee (\bar{a} \wedge b \wedge \bar{c} \wedge (a \wedge b))$$

(Dacă *A* spune adevărul, atunci *B* minte, deci *C* spune adevărul și deci *A* sau *B* minte — deci nu spun amîndoi adevărul; dacă *A* minte, atunci *B* spune adevărul deci *C* minte, deci și *A* și *B* spun adevărul). Ultima conjuncție nu poate fi adevărată deoarece conține conjuncția $a \wedge \bar{a}$. Trebuie deci ca prima conjuncție să fie adevărată. O scriem sub forma echivalentă

$$a \wedge \bar{b} \wedge c \wedge (\bar{a} \vee \bar{b}) \equiv (a \wedge \bar{b} \wedge c \wedge \bar{a}) \vee (a \wedge \bar{b} \wedge c \wedge \bar{b})$$

de unde reținem ultima conjuncție, singura adevărată, $a \wedge \bar{b} \wedge c$. Acesta este răspunsul la problemă.

Las cititorului plăcerea de a exersa în același mod pentru a rezolva următoarea problemă asemănătoare: *A* spune că dacă *B* minte, atunci și *D* minte, *B* spune că *A* și *D* mint, *C* spune că *A* sau *B* minte, *D* spune că dacă *C* spune adevărul, atunci și *B* spune adevărul. Cine minte și cine spune adevărul?

Iată aici numai rezolvarea verbală. Dacă *B* minte, atunci *C* spune adevărul, iar dacă *B* spune adevărul, atunci rezultă că *A* minte, deci, din nou, *C* spune adevărul. Dacă *D* spune adevărul, atunci (deoarece *C* spune adevărul) ar trebui ca și *B* să spună adevărul, deci, conform celor spuse de *B*, rezultă că *D* minte. Contradicție, deci *D* minte și implicit *A* sau *D* spune adevărul. Deja știm că *D* minte; rezultă că *A* spune adevărul și rezolvarea este terminată.

Faptul că logica este un model al gândirii umane a fost numai postulat și ilustrat mai sus. Nu încerc aici să aduc dovezi în această privință. În schimb, voi remarca faptul că

„minciunile“ au dat mare bătaie de cap logicienilor. Este vorba de fapt despre o mare clasă de propoziții autoreferative, care spun despre ele însele că sînt false (sînt „minciuni“). Există multe asemenea *paradoxuri ale mincinosului* (paradoxuri propriu-zise, deoarece neagă legile fundamentale ale logicii, principiul terțului exclus, principiul contradicției etc.). Iată cîteva asemenea paradoxuri, fără comentarii:

— Epimenide cretanul a spus că toți cretanii sînt mincinoși.

— Eu acum mint.

— Fraza pe care o citiți acum nu este adevărată.

— SINGURA FRAZĂ SCRISĂ CU MAJUSCULE DIN ACEASTĂ CARTE ESTE FALSĂ.

— La capătul unui pod stă un căpăun care inghite pe oricine trece pe acolo și minte atunci cînd este întrebat unde se duce. Într-o zi, un trecător răspunde: Am venit ca să mă mănînci.

(Tot gîndindu-se ce are de făcut în această situație, căpăunul a murit de foame. De atunci nu mai sînt căpăuni la capătul podurilor...).

20. ANTICAMERA MATEMATICII — PROBLEMELE DE LOGICĂ DUMINICALĂ

Pentru a face matematică este nevoie de o instruire preabilă care să facă accesibile instrumentele de lucru ale matematicii, metodele și rezultatele achiziționate deja în dezvoltarea ei multiseculară. Raționamentul matematic poate fi însă practicat fără nici un fel de școlire. Un raționament devine „matematic“ numai și numai prin corectitudinea sa, eventual prin construirea sa silogistică, din mai mulți pași înlanțuiți corect. Gîndirea matematică este evident mai puțin decît matematica (aceasta presupune o metodologie precisă, un simbolism etc.), dar, spre desfătarea matematicienilor-nematematicieni, se întinde mult dincolo de matematică. Șiruri frumoase de raționamente se pot construi în orice limbă naturală, adesea chiar fără a folosi măcar creion

și hîrtie, probleme care să ceară asemenea raționamente există cu îndestulare, iar amatori de raționamente ingenioase au existat și vor exista totdeauna. Așa se explică succesul cărților cu amuzamente matematice, aritmetică sau geometrie distractivă, în general, cu probleme de *logică duminicală*, puțin gratuite în sine, forțate ușor pentru a căpăta ceva haz, dramatizate uneori, dar întotdeauna gustate cu voluptatea pe care ți-o dă orice problemă pe care ești în stare să o rezolvi, dar care, nu-i așa?, „e de matematică totuși...“

Ei, nu, aceste probleme nu sînt chiar de matematică, ele se găsesc în anticamera matematicii, precum broșurile din anticamera stomatologului: în ele se scrie cum se îngrijește dinții, cum se folosește periuța, ce și cum să mestecăm, dar adevărata stomatologie se face totuși dincolo de ușa cabinetului, acolo se scot dinții, acolo țipă pacienții. Analogia poate merge mai departe. Așa cum broșurile sînt scrise de stomatologi și conțin uneori și extrase din tratatele propriu-zise de stomatologie, la fel cărțile de logică duminicală sînt scrise de matematicieni cu acces în zonele serioase ale matematicii și de unde sînt aduse în anticameră multe dintre probleme pentru a-l pregăti pe „pacient“, pentru a-l atrage cu poze frumoase și epigrame dincolo de ușă...

Spre deosebire de stomatologie (iertăți-mi obsesia), în matematică este vizibil și fluxul invers; de fapt ușa însăși dintre matematică și anticamera ei nu este precis localizată. Și în nici un caz nu este ermetică. Problema celor patru culori a fost formulată în anticameră, a trecut în matematică (a rămas însă și în anticameră) și a revenit în punctul de plecare prin rezolvarea ei neobișnuită. Teoria probabilităților s-a născut în apropierea meselor cu jocuri de noroc (Pascal, Fermat, Jacques Bernoulli), iar teoria grafurilor s-a născut într-un parc din Königsberg (voi vorbi altădată despre teoria grafurilor). Multe jocuri au fost „mărunțite“ de către matematicieni (unele aruncate complet în desuetudine, cum s-a întimplat cu jocul „15“, în mare vogă în ultimele decenii ale secolului trecut, comercializat astăzi sub numele „Pers-pico“: numărînd inversiunile între figurile unei poziții date se poate vedea dinainte dacă poziția este rezolvabilă sau

nu, fapt ce consumă tot farmecul jocului). De altfel, aplecarea spre jocuri a fost caracteristică majorității marilor matematicieni (ca o manifestare poate a necesității de complementarizare a preocupărilor despre care am vorbit mai înainte). Există declarații programatice în acest sens. De pildă, Leibniz spunea: „Aș dori ca cineva iscusit în matematici și fizică să se ocupe de jocuri. Spiritul omenesc scintilează în jocuri mai puternic decât în orice altceva.“ Iar J.E. Littlewood (în *Varietăți matematice*, Editura enciclopedică română, București, 1969) afirma că „o glumă matematică bună valorează mai mult decât o duzină de lucrări mediocre și este totodată și matematica cea mai bună“. În introducerea la cartea sa de amuzamente matematice (Editura științifică, București, 1968), Martin Gardner amintește de mulți matematicieni care s-au ocupat de jocuri matematice. Pentru că, spune M. Gardner, „nu este mare deosebire între plăcerea pe care o încearcă un novice atunci când descifrează o enigmă ingenioasă și plăcerea pe care o încearcă un matematician atunci când reușește să rezolve o problemă ridicată de știință. Ambele țin de frumosul pur, de acea ordine limpede, net definită, misterioasă, fermecătoare, care se află la baza oricărei structuri. De aceea, nu trebuie să ne surprindă că este adesea greu să facem distincția între matematica pură și cea recreativă.“

Cu riscul de a transforma această carte într-un caleidoscop matematic, voi prezenta mai jos câteva probleme de matematică distractivă. Înainte de asta aș vrea însă să amintesc faptul că asemenea probleme pot fi găsite în cele mai neobișnuite locuri. Fascinația paradoxurilor logice i-a atras de mult pe scriitori; paradoxul cu căpcăunul din finalul secțiunii anterioare era, de fapt, transcrierea unei întâmplări povestite de către Cervantes în *Don Quijote*. În povestirea S.F. „Evadarea lui Algernon“ (din volumul *Himera*, Editura Albatros, București, 1979), Gheorghe Săsărmănoiu folosește un foarte relevant procedeu de diagnosticare a inteligenței eroului său: îl pune să rezolve o lungă și complicată problemă de logică. Și după ce este atins de „molima genialității“, un virus care hipertrofiază inteligența,

eroul chiar rezolvă problema. Nu mai dau aici exemple de probleme de logică din cărțile lui Jules Verne (vezi, de pildă, *Comoara din insulă*), din povestirile lui Edgar Allan Poe (vezi „Cărbușul de aur“) sau din alte cărți polițiste sau ne-, dar care conțin șarade logice, de regulă solid implicate în desfășurarea acțiunii.

P1. Iată acum unul dintre cele mai frumoase calcule cifrate pe care le-am întâlnit vreodată: să se refacă adunarea

GERALD +
DONALD
———
ROBERT

Evident, se presupune că literele corespund unor cifre astfel încât corespondența este univocă: litere diferite sînt asociate unor cifre diferite, iar repetarea cifrei duce la repetarea literei. Împreună cu indicația că *D* are o anumită valoare pe care nu o divulg, problema a constituit obiectul unor experimente întreprinse de către doi psihologi americani care cereau unor subiecți să gîndească cu voce tare în timp ce încercau să o rezolve, pentru a putea trage astfel concluzii asupra psihologiei deciziei și acțiunii umane. Problema are soluție unică chiar și fără precizarea valorii lui *D* (și poate fi rezolvată și în acest caz).

Iată o posibilă rezolvare (pe paragrafe, pentru a putea fi urmărită mai ușor):

a) „Cheia“ este coloana a doua, $E + O \rightarrow O$, și care implică faptul că *E* plus *O*, plus eventual o unitate care este primită de la coloana a treia, dă un număr mai mare decât zece și terminat în *O*. Singura posibilitate este să avem $E = 9$ și într-adevăr coloana a treia să conducă la o sumă mai mare decât zece.

b) Trecem pe coloana a patra, $A + A \rightarrow 9$. Există numai două posibilități; sau $A = 4$ și coloana a cincea furnizează o unitate, sau $A = 9$ și, de asemenea, primim o unitate din dreapta. Deoarece am obținut deja $E = 9$, rezultă că nu mai putem avea și $A = 9$; reținem deci că $A = 4$.

c) Să examinăm prima coloană; deoarece $G \neq D$ și coloana a doua dă o sumă peste zece, rezultă că $R \geq 4$. Cifrele 4 și 9 sînt ocupate de A și E . Rezultă deci că R trebuie să fie una din cifrele 5, 6, 7 și 8.

d) Dacă $R = 8$, atunci, din coloana a cincea, va rezulta că $L = 4$, ceea ce este imposibil (4 este deja folosit).

e) Dacă $R = 5$, atunci sau $L = 2$, ceea ce este imposibil deoarece atunci coloana cinci nu poate da o cifră coloanei patru, sau $L = 7$. În acest caz trebuie însă să avem $D \geq 5$ pentru ca $D + D$ să fie peste zece. Revenind la prima coloană, din $D \geq 5$ rezultă $R \geq 7$. Contradicție.

f) Dacă $R = 6$, atunci $D + G = 5$. Nici una dintre literele D și G nu poate fi egală cu 4, deci nici una nu poate fi egală cu 1. Rezultă că D și G sînt una egală cu 2 și cealaltă egală cu 3 (cifrele corespunzătoare literelor D și G trebuie să fie semnificative). Prin urmare, conform ultimei coloane, avem sau $T = 4$ sau $T = 6$. Primul caz este în contradicție cu $A = 4$, iar al doilea cu $R = 6$.

Nici una din cifrele 5, 6, 8 nu pot corespunde lui R . Rezultă că avem $R = 7$, de unde, conform coloanei a cincea, $L = 8$.

În acest moment, adunarea arată astfel:

$$\begin{array}{r} G9748D + \\ DON48D \\ \hline 70B97T \end{array}$$

g) Privind ultimele două coloane, deducem că $D + D$ este mai mare sau egal cu zece. Privind primele două coloane, deducem că $D \leq 5$. Rezultă deci că avem chiar $D = 5$. Prin urmare, $T = 0$ și $G = 1$.

h) În acest moment au rămas nefolosite cifrele 2, 3 și 6 și sînt încă necunoscute literele N , B , O . Privim coloana a treia: $7 + N = 10 + B$. Dacă $N = 2$, atunci obținem $7 + N = 9$, contradicție. Dacă $N = 3$, atunci $7 + 3 = 10 + 0$ deci $B = 0$; 0 este însă ocupat de T . În consecință, trebuie să avem $N = 6$, ceea ce atrage după sine identificarea $B = 3$. A mai rămas o cifră, 2, și o literă, O .

Ele trebuie să corespundă una alteia și astfel problema este rezolvată. Calculul complet descifrat este următorul:

$$\begin{array}{r} 197485 + \\ 526485 \\ \hline 723970 \end{array}$$

Foarte multe asemenea operații cifrate se găsesc în cartea lui Nicolae Opreșiu, *Mai în glumă, mai în serios*, Editura Dacia, Cluj-Napoca, 1981. (Capitolul 3 este în întregime dedicat acestora; sînt prezentate totodată cîteva procedee sistematice de rezolvare a unor asemenea probleme.) De asemenea, Dan Lăzărescu, în prima parte a cărții *Paleoaritmetica și alte probleme de logică* (Editura Albatros, București, 1981), se ocupă de astfel de probleme, precum și de altele cerînd reconstituirea unor calcule cunoscînd numai informații parțiale despre ele (termenul de „paleoaritmetică” înseamnă exact acest lucru: „este vorba, în principiu, de a reconstitui o adunare sau o scădere, o înmulțire sau o împărțire din care lipsesc — total sau parțial — cifrele”, op. cit., pagina 6).

Iată alte două probleme, dacă nu neapărat amuzante, cel puțin „proaspete”.

P2. Să presupunem că avem un cîntar defect care greșește constant la fiecare cîntărire. Nu știm dacă eroarea este în plus sau în minus, nici cît este ea de mare și nu dispunem de obiecte cu greutatea cunoscută. În aceste condiții, cu un asemenea cîntar, se pot face cîntăriri corecte?

Răspuns. Da. Cîntărim mai întîi obiectul A , cel a cărui greutate ne interesează, împreună cu un alt obiect, B , apoi cîntărim (cu același cîntar, desigur) obiectul B . Scăzînd din rezultatul primei măsurători rezultatul celei de-a doua, obținem exact greutatea obiectului A . (Eroarea introdusă de cîntar este identică în cele două cîntăriri, deci este eliminată împreună cu greutatea obiectului B .)

P3. Trei persoane trebuie să lucreze la degajarea unui teren contaminat chimic. Evident, nu au voie să atingă nici un obiect de pe sol cu mîna. Ei au la dispoziție două pungi de plastic în care își pot introduce o mînă pentru a

putea apuca obiecte fără să intre în contact direct cu ele. Deoarece oricare dintre cei trei poate fi contaminat, nici unul nu trebuie să-și introducă mîna într-o pungă folosită în prealabil de un altul. De asemenea, nu trebuie să atingă exteriorul unei pungi după ce aceasta a fost în contact cu solul. Pot cele trei persoane să-și îndeplinească sarcina folosind numai cele două pungi?

Răspuns. Da, pot. Iată cum trebuie procedat. Se introduc cele două pungi una în cealaltă și prima persoană lucrează cu această pungă dublă în mîna. Se separă apoi cele două pungi, fiecare cu cîte o parte contaminată. Punga care a fost în exterior se folosește de către a doua persoană (are interiorul curat), iar a treia persoană întoarce pe dos cealaltă pungă și o folosește. Toate cerințele de securitate sînt astfel respectate.

Iată acum o problemă care a făcut deja un pas către aritmetica de manual:

P4. Dispunem de cantități nelimitate de cuburi cu latura de 3, respectiv, de 5 cm. Ce lungime pot avea șirurile de asemenea cuburi? Dar dacă limităm numărul cuburilor mari la 2 bucăți?

Răspuns. Fie n un număr natural. El se poate divide exact la 3 sau poate să dea restul 1 sau 2. (Se spune că n este congruent modulo 3 cu 0, 1 sau cu 2.) În primul caz, n se poate scrie ca sumă de cifrele 3, în al doilea caz, scăzînd din n numărul $3 + 3 + 3 + 1 = 10 = 5 + 5$, obținem un număr divizibil la 3, iar în ultimul caz obținem un multiplu al lui 3 scăzînd din n numărul $3 + 2 = 5$. În consecință, orice număr multiplu al lui 3 poate fi lungimea unui șir de cuburi cu latura de 3 cm, orice număr de forma $3k + 4$, mai mare sau egal cu 10 este lungimea unui șir în care intră două cuburi cu latura de 5 cm și un număr (care poate fi nelimitat) de cuburi mici și, în sfîrșit, orice număr de forma $3k + 2$, mai mare sau egal cu 5, este lungimea unui șir în care intră un cub mare și un număr oarecare de cuburi mici. În concluzie, răspunsul la cele două întrebări este același: 0, 3, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14,...

21. PROBLEME „CIUDATE”, TEOREME „CIUDATE”

În lucrarea de față au mai apărut rezultate șocante, paradoxale (așa cum erau teoremele lui Arrow și Gödel), numere foarte mari sau foarte mici (amintiți-vă de probabilitatea de a găsi o hartă cu mai mult de 36 de regiuni care nu se poate colora cu patru culori). În cele ce urmează voi face o mică expoziție cu alte cîteva asemenea exemplare interesante, fără a intra în prea multe amănunte.

Prima piesă este celebra teoremă a lui Jordan. Enunțul ei „scurt” este următorul: Orice curbă simplă închisă împarte planul în două regiuni, una interioară și una exterioară. (O curbă este simplă dacă nu se intersectează cu ea însăși.) Înțelesul mai precis al teoremei este că orice curbă simplă închisă împarte planul în două regiuni astfel încît orice două puncte aflate în aceeași regiune pot fi unite printr-o curbă care nu intersectează curba inițială, dar două puncte aflate în regiuni diferite nu pot fi unite astfel.

Sper că cititorul este cel puțin contrariat de faptul că am numit această teoremă „celebră”. Aș vrea să adaug că demonstrația teoremei este foarte anevoioasă și că prima demonstrație dată de Camille Jordan nici nu era corectă.

Cum, un fapt atît de banal mai necesită demonstrație? Și încă una complicată? Ciudat, nu?, cel puțin ciudat... (Ultima propoziție se referă la obiceiul matematicienilor de a demonstra tot și cu deosebire ceea ce este evident...)

Ei bine, este vizibil că teorema este adevărată pentru figuri simple, pentru un cerc, de exemplu, dar ce ne facem cu alte curbe mai complicate, cum este cea din figura 21.2, de exemplu?

Ia spuneți, punctele A și B din desenul supraréalist prezentat în figura 21.2 sînt sau nu de aceeași parte a curbei, pot sau nu să fie unite cu o linie care nu intersectează curba? Probabil că veți da răspunsul în cîteva zeci de secunde (colorînd, de exemplu, desenul, începînd cu regiunea punctului A și continuînd pînă ce sau ajungeți la punctul B , sau aco-

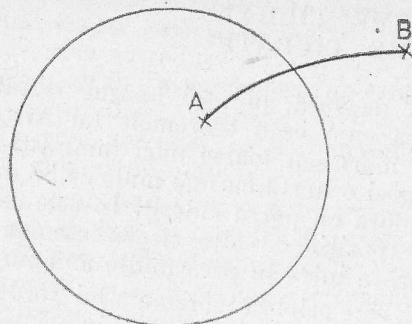


Fig. 21.1

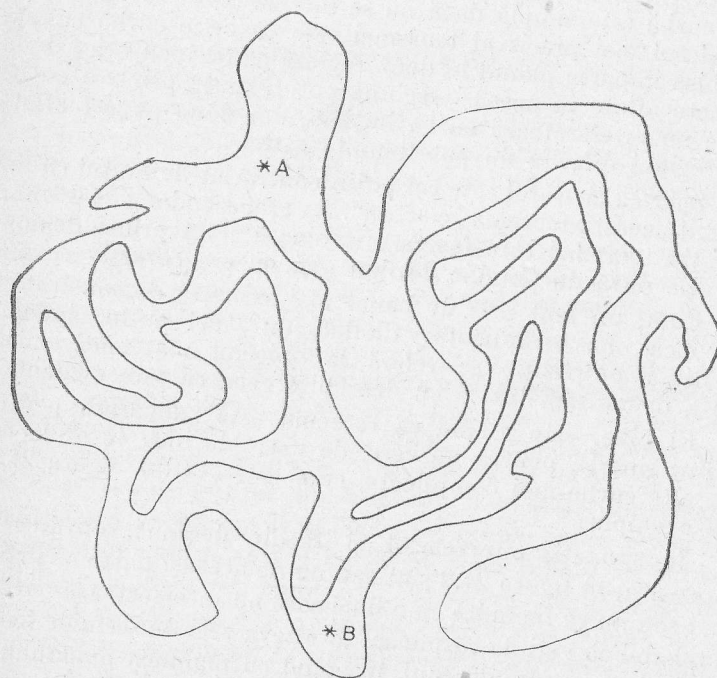


Fig. 21.2

periți aproape toată pagina fără a-l colora și pe acesta). Dar ce faceți dacă eu aveam suficientă răbdare (iar editura îmi dădea spațiu tipografic) pentru a desena o curbă asemănătoare pe întreaga pagină?... Trebuie să convenim că problema nu mai pare banală. Și ce înseamnă „curbă”, ce este aceea o curbă? Dacă o luăm ca în Euclid, „linia este lungime fără lățime; sfârșitul unei suprafețe este o linie; margine este ceea ce reprezintă sfârșitul a ceva”, nu ajungem nicăieri. Dacă prin curbă înțelegem „urma unui punct în mișcare”, ajungem la Jordan, la considerarea coordonatelor punctelor de pe curbă ca fiind valorile unei perechi de funcții continue dependente de o variabilă — timpul. Cu o asemenea definiție, singura riguroasă și acceptată astăzi în matematică, demonstrația teoremei lui Jordan devine problematică. În manualul Catedrei de Analiză matematică a Facultății de Matematică a Universității din București (Editura didactică și pedagogică, București, 1980) i se consacră nu mai puțin de 9 pagini de format mare.

Să remarcăm faptul interesant că pe alte suprafețe decât planul, teorema lui Jordan nu mai este neapărat adevărată. Pe tor, de exemplu, cercurile care înconjoară torul transversal sau sînt perpendiculare pe acestea, împart suprafața torului într-o singură regiune (figura 21.3).

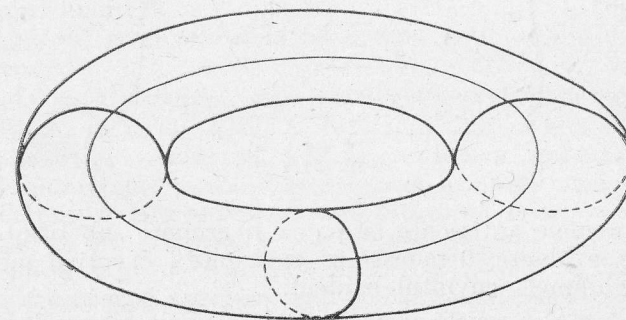


Fig. 21.3

O problemă similară celei din teorema lui Jordan este problema acoperirii: să se dividă planul (nemărginit) în regiuni mărginite astfel încît să nu existe puncte în care să se întilnească mai mult de două regiuni. Există o teoremă, din nou amarnic de greu de demonstrat, care spune că problema anterioară nu are soluție.

Și totuși, problema pare evidentă, *oricum* am încerca să așezăm pe o masă bucăți mici de hirtie nu putem face în așa fel încît să nu ajungem la puncte de „triplă frontieră”. Tocmai asta este, că trebuie demonstrat că *oricum* am încerca, și acest *oricum* este greu de prins într-un raționament.

În treacăt, să notăm că putem face acoperiri ale planului (ale unei hărți, de exemplu) astfel încît să nu avem puncte în care se întilnesc mai mult de trei regiuni. De exemplu (vezi figura 21.4), dacă există un punct în care se întilnesc mai mult de trei regiuni, atunci considerăm acolo încă o regiune care elimină acest punct, introducînd mai multe puncte de frontieră triplă.

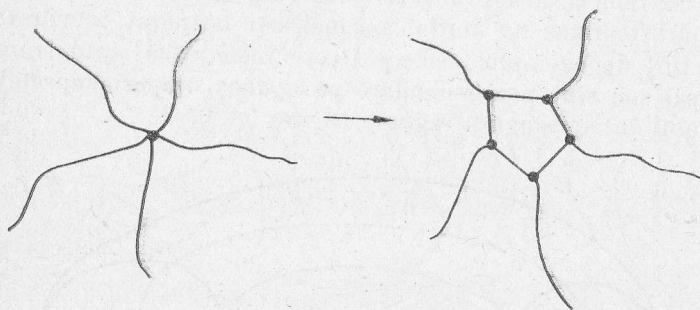


Fig. 21.4

Teoremele anterioare ar putea fi grupate sub titlul „rezultate evidente, demonstrații epuizante”, eventual punînd între ghilimele cuvîntul evident.

Să facem o scurtă incursiune și în teoria numerelor, domeniul unora dintre cele mai interesante piese pe care un

posibil muzeu al rezultatelor matematice curioase ar trebui să le conțină.

Iată, de pildă, conjectura lui Goldbach, formulată prin secolul al XVIII-lea: Orice număr par diferit de doi se poate scrie ca suma a două numere prime. Într-adevăr, $4 = 2 + 2$, $6 = 3 + 3$, $8 = 5 + 3$, $10 = 5 + 5$, $100 = 41 + 59$, $102 = 43 + 59$ etc. etc. Conjectura a rămas conjectură pînă astăzi, nimeni nu a reușit să găsească un contraexemplu și nici să demonstreze că Goldbach a avut dreptate.

Și acum iată minunea: În anul 1931, matematicianul sovietic Schnirelmann (pe atunci în vîrstă de 26 de ani!) demonstrează că *orice număr natural poate fi reprezentat ca sumă a cel mult 300 000 de numere prime!* Adică Goldbach ceruse sume de două numere prime, iar Schnirelmann garantează pentru cel mult 300 000 de numere prime! După mine, acesta este cel mai trăznit rezultat matematic pe care l-am auzit vreodată.

Cevă mai tîrziu, Vinogradov reduce numărul de termeni la numai 4, dar numai pentru numere suficient de mari: Nu există o infinitate de numere întregi care nu pot fi descompuse sub forma unei sume de cel mult patru numere prime. Nu știu dacă demonstrația lui Vinogradov indică o limită începînd de la care orice număr poate fi scris ca sumă a cel mult patru numere prime. Dacă o asemenea limită există, atunci situația începe să semene cu cea a teoremei celor patru culori. Punînd la lucru un calculator, s-ar putea examina numerele mai mici decît această limită și... din nou calculatorul ar fi pârtaș la rezolvarea unei probleme matematice.

Iată încă doi pași spre rezolvarea problemei pusă de Goldbach: În 1946–1947, A. Renyi, în timp ce studia teoria numerelor la Leningrad, obține rezultatul important că „orice număr par poate fi reprezentat ca suma unui număr prim cu un număr neprim, acesta din urmă avînd un număr limitat de factori primi”. Mai tîrziu, numărul acestor factori primi a putut fi limitat drastic și anume la cel mult patru (rezultatul aparține unui tînăr matematician sovietic, Barban).

Încă o problemă care m-a umplut de invidie citindu-i soluția se găsește în „The American Mathematical Monthly“, 86, 3 (1979) și se referă la așa-numitele „fracții egiptene“. Problema cere să se găsească o mulțime finită S de numere naturale astfel încât pentru orice n din S , sau $n - 1$ sau $n + 1$ se găsește în S și suma inverselor ($1/n$) acestor numere să fie un număr întreg.

Iată două soluții date în revista amintită (vă rog mult să nu mă întrebați cum au fost găsite):

$$S_1 = \{1, 2, 7, 8, 13, 14, 39, 40, 76, 77, 285, 286\},$$

$$S_2 = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 17, 18, 34, 35, 84, 85\}.$$

Iată alte două performanțe care aparțin lui Fermat:
Sistemul diofantic

$$\begin{aligned} x + y &= u^2 \\ z &= v^2 \\ x^2 + y^2 &= z^2 \end{aligned}$$

are soluția

$$\begin{aligned} x &= 1\,061\,652\,293\,520 \\ y &= 4\,565\,486\,027\,761 \\ z &= 4\,687\,298\,610\,289. \end{aligned}$$

Cea mai mică soluție în numere întregi a ecuației

$$x^2 - 109y^2 = 1$$

este

$$\begin{aligned} x &= 158\,070\,671\,986\,249 \\ y &= 15\,140\,424\,455\,100. \end{aligned}$$

Dacă cititorul nu are ce face poate să verifice afirmațiile anterioare. Eu n-am încercat, m-am mărginit la a le copia (sper, fără greșală) din *Recreații matematice* de H.R. Radian, T.J. Radian, Editura Albatros, București, 1973.

În sfârșit, să cităm după George Șt. Andonie, *Varia matematica* (Editura tineretului, București, 1969), pagina 156, cazul unui matematician german, Hermes pe nume, care a calculat timp de 10 ani latura poligonului regulat cu 65 537 de laturi și chiar a dus la bun sfârșit această aven-

tură în urma căreia, iată, a intrat într-un fel în istoria matematicii. Există unii care sar fără parașută (din avion) sau stau ore în șir cu capul în jos, sau vorbesc neîntrerupt mai multe zile pentru a intra într-o carte cu efemere „recorduri“. Iată că și matematicienii ar avea reprezentanți într-un asemenea club...

La pagina 93 a aceleiași lucrări găsim un nou rezultat interesant: cele mai mici două numere consecutive ale căror pătrate sînt formate din aceleași cifre sînt

$$\begin{aligned} 29\,700\,157^2 &= 882\,099\,325\,824\,649 \\ 29\,700\,158^2 &= 882\,099\,385\,224\,964 \end{aligned}$$

Am să închei cu referire la un număr ceva mai comprehensibil, mai „uman“, banalul număr 30. Care nu este deloc banal, ne asigură H. Rademacher și O. Toeplitz în capitolul XXVII al cărții *Despre numere și figuri*, Editura științifică, București, 1968: numărul 30 este cel mai mare număr care are proprietatea că toate numerele mai mici decît el și relativ prime cu el (nu au divizori comuni) sînt numere prime.

Numere prime... Iarăși au apărut aceste misterioase numere prime! Le voi demistifica îndată; să intre în scenă numerele prime!

22. MISTERIOASELE NUMERE PRIME

Am amintit undeva că Gauss — principele matematicii — a spus că „Matematica este regina științelor“. De fapt, el adăuga: „iar teoria numerelor este regina matematicii“. Și se poate continua: dintre toți supușii acestei regine, cei mai nesupuși sînt numerele prime.

Într-adevăr, istoria matematicii este presărată din abundență cu probleme care s-au lăsat greu rezolvate, cu probleme nerezolvate încă, cu teoreme celebre prin complexitatea demonstrației sau prin forma lor neobișnuită și în care apar numere prime. Să ne amintim de polinoamele pentru generat numere prime, de ipoteza lui Goldbach și de rezultatele lui Schnirelmann și Vinogradov.

Există multe alte probleme și rezultate de o straniețate comparabilă. Pe unele le voi trece în revistă în cele ce urmează.

De unde vine interesul pentru numerele prime? (interes manifestat atât de matematicienii profesioniști cit și de cei amatori). De ce au fost atât de mult studiate, de ce apar în atât de multe locuri? Probabil că răspunsul poate fi compus din mai multe observații. În primul rând, numerele prime sînt studiate pentru că ele există (așa cum spunea un mare alpinist al cărui nume nu l-am știut niciodată: „Everestul este escaladat pentru că el există.“). Mai mult, problemele referitoare la numerele prime s-au dovedit dificile, deci cu atât mai excitante pentru matematicieni. Pe de altă parte, probabil că există și o fascinație intrinsecă a acestor numere fără divizori, numere-monolit, fascinație susținută și de numele lor și al numerelor care nu sînt prime: într-adevăr, cînd spunem *numere prime* și *numere neprime*, din înseși aceste cuvinte rezultă că numerelor prime li se dă mai mare importanță, li se recunoaște o personalitate mai puternică — celelalte numere sînt ne-prime. Dacă s-ar fi spus *numere compuse* pentru numerele cu divizori diferiți de unu și de numărul însuși și *numere necompose* pentru numerele fără divizori, atunci, psihologic, situația se inversa. În sfîrșit, apariția numerelor prime în cele mai neobișnuite situații și domenii mărește și mai mult interesul față de ele. Argumente la această ultimă afirmație pot fi găsite în multe dintre secțiunile acestei lucrări, cu deosebire în secțiunile 17 și 21.

Istoria numerelor prime începe încă din Antichitate și nici nu se putea altfel dacă ținem seama de plăcerea minuirii numerelor la matematicienii greci. Astfel, Pitagora și elevii lui (secolul al VI-lea î.e.n.) cunoșteau numerele prime, iar Euclid cunoștea descompunerea numerelor în factori primi. A rămas un model de raționament ingenios modul în care Euclid demonstra prin reducere la absurd că există o infinitate de numere prime (în formularea lui Euclid, că „există mai multe numere prime decît orice mulțime de numere

prime date“): Să presupunem că există o mulțime finită de numere prime și fie p cel mai mare asemenea număr. Numărul

$$q = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot p + 1$$

va fi de asemenea număr prim. Într-adevăr, împărțit cu $2, 3, \dots, p$, el dă invariabil restul 1, deci nu se divide la aceste numere. Am presupus că nu există numere prime mai mari decît p . Prin urmare, dacă q ar avea factori mai mari decît p , aceștia trebuie să fie numere neprime compuse din numere prime mai mici decît p . Ar rezulta că q se divide la asemenea numere prime, ceea ce am văzut că nu se întîmplă. În concluzie, numărul q trebuie să fie prim. Dar, pe de altă parte, el este strict mai mare decît p , ceea ce contrazice faptul că p este cel mai mare număr prim.

Să remarcăm faptul că numărul q nu este neapărat prim în sensul exact al cuvîntului; în raționamentul anterior el se dovedea prim în raport cu presupunerea că există o mulțime finită de numere prime. De exemplu, $1 \cdot 2 + 1 = 3$ și $1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 = 7$ sînt numere prime, dar $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 1 = 25$, $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 1 = 121$ nu mai au această proprietate.

Tot din vremea lui Euclid se știe că dacă $2^p - 1$ și p sînt numere prime, atunci orice număr de forma

$$q = 2^{p-1} (2^p - 1)$$

este număr perfect (un număr este perfect dacă el este egal cu suma divizorilor săi diferiți de el însuși; asemenea numere sînt, de exemplu, $6 = 1 + 2 + 3$, $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$). Iată deci că au și început să apară numere prime în probleme asupra altor noțiuni. În treacăt voi aminti că încă „nu s-a demonstrat pînă acum că nu există numere perfecte impare“ (N. Mihăileanu, *Istoria matematicii*, Editura enciclopedică română, București, 1974).

Tot din Antichitate datează cel mai bun (citește: rapid) algoritm pentru a genera toate numerele prime dintr-o mulțime $\{2, 3, \dots, n\}$ și anume *ciurul lui Eratostene*. Iată cum funcționează acest „ciur“: Ne fixăm asupra lui 2 și ștergem din mulțime toate numerele care sînt multipli

ai lui 2. Trecem mai departe la primul număr care nu a fost încă șters. El este prim. Ștergem toți multiplii lui și continuăm procedura până ce ajungem la un număr m care depășește pe $\sqrt{n}$. Atunci ne oprim; numerele rămase sînt toate numerele prime din mulțimea noastră (cele neprime au trecut prin ochiurile ciurului).

O altă problemă „antică” este cea a construirii cu rigla și compasul a laturii poligonului regulat cu n laturi. Construcția prezintă interes numai pentru n prim deoarece pentru n neprim problema se reduce la construirea laturilor pentru poligoanele cu atîtea laturi cît arată factorii primi ai lui n .

Să ne amintim de Hermes, cel care a construit latura poligonului regulat cu 65 537 de laturi. Ei bine, problema se înscria pe linia anterioară: numărul 65 537 este prim și, mai exact, este egal cu $2^{24} + 1$. Numerele de forma $2^{2^n} + 1$ poartă numele de numerele lui Fermat, deoarece acesta a emis ipoteza că toate sînt prime (afirmație verificată pentru $n = 0, 1, 2, 3, 4$, dar nu și pentru $n = 5$, caz în care se obține numărul neprim $4\,294\,967\,297 = 641 \cdot 6\,700\,417$).

Istoria acestor numere ale lui Fermat este destul de interesantă. Să notăm cu $F(n)$ numărul 2^{2^n} . Numerele $F(0), \dots, F(4)$ sînt prime și am văzut că $F(5)$ nu este prim. Nici $F(6)$ nu este prim. Se pare că nu se știe dacă $F(7)$ și $F(8)$ sînt sau nu prime, în schimb, se știe că $F(12)$, $F(17)$, $F(25)$, $F(36)$ și $F(73)$ nu sînt numere prime. Evident, verificările nu s-au făcut cu mîna. Ar fi puțin cam exagerat, chiar obositor, de încercat așa ceva. De pildă, $F(36)$ are mai mult de 20 de miliarde de cifre, adică suficiente pentru a înconjura Pămîntul la ecuator cu ele. Iar pentru a scrie cifrele numărului $F(73)$ toată populația globului pămîntesc ar trebui să scrie (după alfabetizare, desigur) continuu în jur de 100 000 de ani (George Șt. Andonie, op. cit., p. 53). Apropo de timpul necesar pentru a verifica dacă un număr este prim sau nu, să-l cităm pe J.E. Littlewood, care în *Varietăți matematice* (Editura enciclopedică română, București, 1969), la pagina 127, precizează că un specialist i-a spus că numerele mai mici decît $2,7 \cdot 10^9$ pot fi cîmplet fac-

torizate în 40 de minute, numerele mai mici decît 10^{15} într-o zi, cele mai mici decît 10^{20} într-o săptămînă, iar numerele mai mici decît 10^{100} , cu ceva noroc, într-un an.

O notă de subsol din aceeași carte (pagina 126) ne informează că cel mai mare număr prim cunoscut (la data scrierii cărții) este $2^{4\,423} - 1$, care are 1 332 de cifre și a fost determinat în anul 1961 de către Hurwitz și Selfridge cu ajutorul unui calculator electronic.

Revenind la problema construirii poligoanelor regulate cu rigla și compasul, voi aminti rezultatul lui Gauss cum că poligoanele cu $n = 2^m + 1$ laturi, unde n este număr prim, precum și cele cu $n = 2^k \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_r$, unde p_i sînt numere prime de această formă, pot fi construite.

Nu mai continui șirul curiozităților numerice în care intră numere prime; secolele al XIV-lea — al XVIII-lea, cu obiceiurile duhurilor publice matematice (cineva propunea altuia în public o problemă — pe care el știa să o rezolve — și cel provocat trebuia să ridice mînușa dacă nu cumva voia să-și piardă reputația) sînt foarte productive în asemenea exemple: numere prime care rămîn prime oricum le-am permuta cifrele (113, 199, 337), numere prime care răsturnate dau tot numere prime etc. etc. Cititorul poate găsi asemenea exemple în cartea citată a lui G. Șt. Andonie.

Voi aminti însă aici trei probleme (două rezolvate deja) referitoare la distribuția numerelor prime printre numerele naturale. Într-adevăr, problema este firească (și deosebit de grea): cît de dese sînt numerele prime printre celelalte numere? O indicație ne-a dat-o deja Euclid: există numere prime oricît de mari. Dar există numere prime consecutive la distanță oricît de mare unul de altul?

Răspunsul este afirmativ și este cunoscut în teoria numerelor sub numele de teorema lui Wilson. De fapt, demonstrația acestei teoreme ne este sugerată direct de demonstrația afirmației lui Euclid. Într-adevăr,

numărul $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n + 2$ se împarte la 2 deci nu este prim,

numărul $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n + 3$ se imparte la 3 deci nu este prim,

 numărul $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n + n$ se imparte la n deci nu este
 număr prim.

Am găsit astfel $n - 1$ numere consecutive care nu sînt prime. Dacă numărul n este suficient de mare, atunci am găsit un interval între două numere prime (cel mai mare număr prim mai mic decît $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n + 2$ și cel mai mic număr prim mai mare decît $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n + n$) mai mare decît un prag dat. Oricare ar fi deci un prag dat, există două numere prime consecutive a căror diferență este mai mare decît acest prag.

Apare acum ca firească întrebarea referitoare la cea mai mică diferență între două numere prime consecutive, diferența 2. Există multe perechi de numere prime consecutive cu această diferență: (3,5), (5,7), (11,13), (17,19), (29,31) etc. Problema dacă există o infinitate de asemenea perechi nu a fost rezolvată încă.

Și totuși, cît de dense sînt numerele prime? Răspunsul la această întrebare face obiectul unei teoreme celebre denumită chiar *teorema numerelor prime*.

Să notăm cu $A(x)$ numărul de numere prime mai mici ca x . Încă din anul 1798, Legendre emitea ipoteza că numărul $A(x)$ este de forma

$$\frac{x}{A \ln x + B}$$

unde A și B sînt constante. În anul 1808, el revine spunînd că $A(x)$ este de forma

$$\frac{x}{\ln x + B(x)}$$

unde „ $B(x)$ este aproximativ 1,08366”.

Examinînd foarte bogate tabele cu numere prime (calculate manual și aproape perfect; numai puține erori au

putut fi ulterior detectate folosind un calculator electronic!), Gauss precizează conjectura lui Legendre sub forma

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{A(x)}{\frac{x}{\ln x}} = 1.$$

Cu alte cuvinte, numărul $A(x)$ crește în raport cu x la fel de repede cum crește numărul x în raport cu logaritmul său natural (deci numerele prime sînt „logaritmice de rare” în mulțimea numerelor naturale).

Conjectura lui Gauss a fost demonstrată afirmativ de către Jacques Hadamard în 1896 și, independent de acesta, de către Charles-Jean-Gustave-Nicolas de la Vallée Poussin în același an, după ce Riemann indicase direcțiile de atac ale problemei. Teorema este „una dintre cele mai remarcabile descoperiri din matematică” (R. Courant, H. Robbins, op. cit.).

În sfîrșit, o ultimă teoremă referitoare la numerele prime: în orice progresie aritmetică în care primul termen este relativ prim cu rația (nu au divizori comuni diferiți de unu) există o infinitate de numere prime. Teorema aparține lui Dirichlet, este foarte grea și a rămas nesimplificată după mai mult de 100 de ani de cînd a fost obținută. Așa cum afirmă Courant și Robbins, „ea nu poate fi înțeleasă decît de persoane care posedă în întregime analiza matematică și teoria funcțiilor”. De remarcat că teorema lui Dirichlet rezolvă o conjectură enunțată de același Legendre și că demonstrația lui Dirichlet a introdus în studiul numerelor prime metoda nouă a folosirii analizei, metodă care s-a dovedit mai tîrziu de mare utilitate, chiar și pentru obținerea teoremei numerelor prime.

Numerele prime, „cărămizile” celorlalte numere, au o puternică personalitate nu numai pentru că nu se lasă descompuse, ci și pentru că nu se lasă ușor prinse în teoreme. Este atribuită lui J.E. Littlewood fraza: „Numerele naturale sînt prietenii mei.” Sînt curios dacă el se gîndea în acel timp și la numerele prime. Dacă da, atunci mi se pare mai firesc

să fi spus: „Numerele naturale sînt prietenii mei; cele prime îmi sînt însă prieteni necredincioși; nu sînt aproape niciodată deschiși față de mine...”

23. CORPURI GEOMETRICE CARE „NU POT EXISTA”: BANDA LUI MOEBIUS ȘI STICLA LUI KLEIN

Să trecem direct la fapte. Să luăm o bandă de hîrtie și să-i unim capetele pentru a forma un inel (figura 23.1).

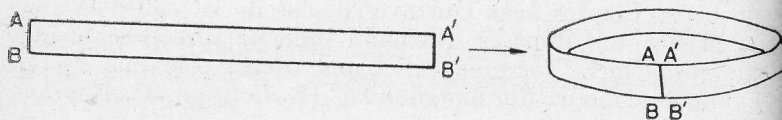


Fig. 23.1

Obținem un inel care are *două fețe*, una interioară și una exterioară, și *două muchii*, una superioară și una inferioară. Un gîndăcel care ar vrea să treacă de pe o față pe cealaltă ar trebui să traverseze neapărat o muchie pentru a-și realiza intenția. Iar dacă tăiem inelul de-a lungul unei linii paralele cu cele două muchii, vom obține două cercuri separate, de lărgimi identice.

Să complicăm experimentul și să luăm două benzi de hîrtie, să le punem una peste cealaltă și să le unim capetele. Obținem două inele, unul în celălalt, iar un gîndăcel care ar merge printre inele l-ar avea permanent pe unul sub picioare și pe celălalt în spate (figura 23.2).

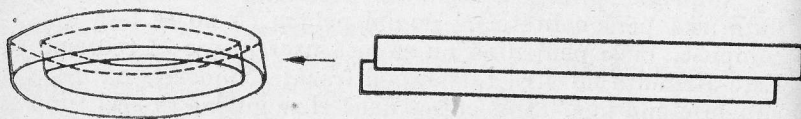


Fig. 23.2

Dacă înainte de a lipi benzile de hîrtie, în primul sau în al doilea caz, facem încă o jumătate de răsucire a lor, corpul care se obține va avea proprietăți cu totul noi, diferite de cele anterioare, cele „normale”. Această simplă jumătate de răsucire ne aruncă parcă într-o lume cu totul deosebită, în care intuiția este contrazisă la fiecare pas. Ceea ce se obține este o *bandă a lui Moebius* (deși se pare că banda ca atare a fost descoperită de J.B. Listing, același care a folosit pentru prima dată cuvîntul topologie; banda este însă cunoscută astăzi cu numele redescoperitorului ei).

Iată, de pildă, să considerăm o bandă a lui Moebius simplă, ca aceea din figura 8.2. Dacă avem curiozitatea să mergem cu degetul pe o muchie a ei, pornind dintr-un punct precizat, vom reveni în acel punct abia după două parcurgeri ale benzii, trecînd o dată prin fața punctului marcat, dar pe „cealaltă muchie”. Și totuși n-am ridicat degetul de pe hîrtie. Înseamnă că, de fapt, banda nu are *două* muchii, ci numai una singură!

Ea nu mai are nici două fețe! Dacă încercăm să colorăm în roșu o față și în albastru pe cealaltă, atunci vom avea surpriza să constatăm că, începînd cu culoarea roșie, banda va sfîrși prin a deveni roșie în întregime.

Surprizele pot fi și mai mari dacă tăiem o bandă de-a lungul unei linii longitudinale, așa cum am făcut cu inelul de hîrtie. Înainte de a citi mai departe, sau de a încerca practic experimentul, cititorul ar trebui să-și pună intuiția la încercare pentru a preciza ce se va întîmpla.

Ei bine, se vor întîmpla diverse lucruri ciudate, depinzînd de linia pe care se face tăietura. Dacă se face o tăietură exact la jumătatea distanței dintre cele două margini ale benzii de hîrtie (de fapt, singura muchie a benzii lui Moebius), atunci se va obține o singură bandă Moebius de lungime dublă. Dacă însă tăiem banda la o treime din distanța dintre cele două margini, atunci se obțin... două benzi Moebius înlănțuite, una dublă și una de aceeași mărime cu banda inițială. Să continuăm. Dacă tăiem banda la un sfert din distanța dintre margini se obțin tot două benzi înlănțuite, una dublă, cu lățimea cit un sfert din fișia de hîrtie și cea-

laltă de înălțimea benzii inițiale, de lățime cît jumătate din lățimea benzii de hîrtie, provenind din partea centrală a benzii inițiale. Și așa mai departe. Ori de cîte ori am împărți lățimea fișiei de hîrtie se obțin tot două benzi Moebius înlănțuite, una dublă ca lungime și de lățime mică și una păstrînd lungimea inițială și cu lățimea diminuată numai cu de două ori lățimea benzii celei mari.

Să construim însă o bandă Moebius dublă, formată din „două” benzi paralele, așa cum am obținut inelul dublu din figura 23.2. Punînd un gîndăcel să meargă între cele două benzi vom avea surpriza să constatăm că de data aceasta podeaua și tavanul se confundă, cele două benzi sînt una singură și separîndu-le obținem într-adevăr o singură bandă Moebius, de lungime dublă (și răsucită de două ori).

Martin Gardner, descriînd (la pagina 68) în *Amuzamente matematice* un asemenea experiment, ne previne că „odată ce ați deschis modelul ca să formați banda mare, veți constata că este o treabă destul de încurcată să-i redați forma inițială”.

Personal, mi-am pus iscusința la încercare pentru a reface o asemenea bandă. Eram singur în birou, nu m-a văzut nimeni și aș putea să nu vă dezvălui rezultatul... A durat cam șase minute pînă am tăiat nodul gordian... rupînd pur și simplu hîrtia și aruncînd-o. Banda se răsucea între degetele mele, se înnodea, făcea bucle, se desfăcea, reușeam să o suprapun pe jumătate din lungime pentru a constata apoi că ajungea la celălalt „capăt” să se așeze cu o muchie peste ea însăși, mi-a amețit pur și simplu degetele și privirea, dar nu voia în nici un chip să revină la forma dinainte. Într-o vacanță, cînd voi avea mai mult timp, am să mă ocup mai serios de problemă și după ce voi reuși (sper!) să găsesc metoda de a cuminti o asemenea bandă Moebius, îmi voi confectiona cîteva dintr-un material rezistent și-mi voi pune la încercare oaspeții prea încrezători în dexteritatea minilor lor. Va fi o dulce răzbunare pentru cele șase minute de stupefacție și neputință...

Există însă și o încercare pe care Martin Gardner nu o amintește și care mi se pare și mai amenințătoare: să luăm

două fișii de hîrtie și să formăm banda Moebius suprapusă. Fără a o deschide, să tăiem simultan cele două fișii de-a lungul unei linii la egală distanță de margini. Se obține... ați ghicit!, o bandă dublă ca lungime, dublă și în sensul că este formată din două fișii paralele de hîrtie. Să ne luăm inima în dinți și să încercăm să separăm cele două fișii. Mai înainte se obținea o bandă mare răsucită de două ori. Acum se obțin — stupoare! — două benzi mari răsucite fiecare de cîte două ori și înlănțuite de cîte două ori (cam ca în figura 23.3, unde este indicată numai înlănțuirea, nu și răsucirea, mult mai greu de desenat).

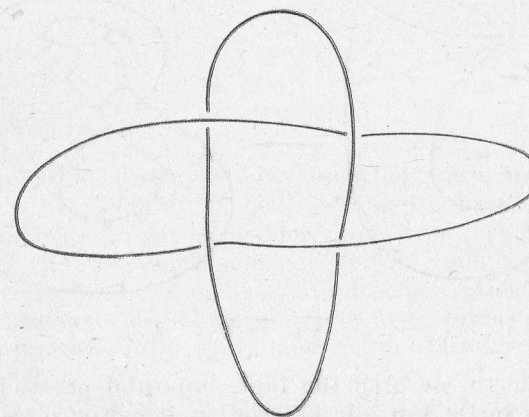


Fig. 23.3

Dacă cititorul reușește să aducă aceste două benzi la forma inițială, deci să le suprapună, apoi să le relipească marginile tăiate, îl rog să-mi spună. Deși umilit, voi avea atunci o mare desfătare invidioasă aflînd soluția.

Rezultate interesante se obțin dacă banda de hîrtie nu se răsucește numai pe jumătate (cu 180 de grade), ci complet (cu 360 de grade). În acest caz, banda rămîne cu două fețe și cu două muchii, iar prin tăiere longitudinală nu mai dă o singură bandă de lungime dublă, ci două benzi înlănțuite.

Tăindu-le și pe acestea, se vor obține patru benzi de lungimi egale, înlanțuite două câte două în orice combinație posibilă. Continuând tăierea, obținem opt benzi înlanțuite toate cu toate și așa mai departe.

Există și un alt corp „imposibil”, rudă bună cu banda lui Moebius și anume *sticla lui Klein*. Orice sticlă, toată lumea știe, are două fețe, o margine, un interior și un exterior. Sticla lui Klein (asemănarea cu o sticlă este totuși parțială, vezi figura 23.4) are o singură față, nici o margine, iar interiorul ei este același cu exteriorul!

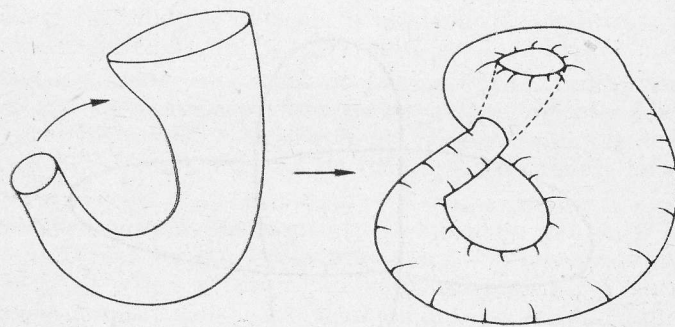


Fig. 23.4

Este destul de greu (de fapt, imposibil practic) de construit din hirtie sau alt material asemănător o sticlă a lui Klein. În principiu, dintr-un tub de cauciuc se poate obține o asemenea sticlă introducând tubul prin el însuși (fără a decupa totuși porțiunea prin care se intră!) și lipind capetele tubului. Un model de hirtie este indicat în figura 23.5 (atenție, cu locul de intrare decupat, deci modelul este imperfect).

Este interesant ce se întâmplă dacă vrem să tăiem o sticlă a lui Klein: obținem o nouă sticlă, așa cum se întâmplă cu banda lui Moebius, sau obținem un nou corp? Evident, depinde de locul tăieturii. Și o bandă Moebius, tăiată de-a latul, se desfăcea, revenind la o simplă fișie de hirtie. Ce se

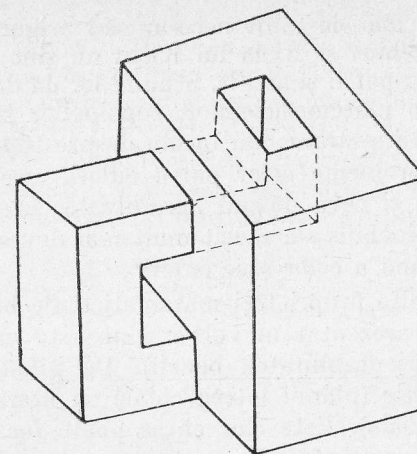


Fig. 23.5

întimplă dacă tăiem o sticlă a lui Klein „de-a lungul”, într-un plan vertical (gândindu-ne la sticla din figura 23.4)? Răspunsul este surprinzător (deși nimic nu trebuie să ne mai surprindă în această zonă): se obțin două benzi Moebius, una reflectarea în oglindă a celeilalte. Sticla neputând fi realizată exact din hirtie este greu de imaginat cum se desfășoară lucrurile (deși aproximări pot fi obținute; vezi Stephen Barr, *Experiments in topology*, Thomas Y. Crowell Company, New York, 1964, paginile 64–65). De la începutul cărții lui Stephen Barr să reținem însă următorul *limerick*, acea specie de poezii într-o strofă, atât de specifice umorului sec englezesc încât multe nici nu par a putea fi gustate pe alte meridiane:

Un matematician pe nume Klein,
Gândindu-se că banda lui Moebius e divină,
Își spune: Dacă lipești
Marginile a două benzi
Vei obține o sticlă stranie ca a mea.
(În englezește limerick-ul avea și rimă, dar...)

Poate era mai de mult necesar să-l asigur pe cititor că banda lui Moebius și sticla lui Klein nu sînt simple jucării din hîrtie (deși pot fi și asta!). Studiul lor dă destul de multă bătaie de cap matematicienilor, topologilor în special (voi vorbi cu cîteva secțiuni mai încolo despre topologie). Să ne amintim de problema celor patru culori, cea care în plan a stat o sută și ceva de ani nerezolvată, în timp ce pe o bandă a lui Moebius s-a reușit mult mai devreme să se producă o „teoremă a celor șase culori“.

Există și alte proprietăți matematice ale benzii lui Moebius ușor de prezentat în vorbe. Una este orientabilitatea (de fapt, neorientabilitatea benzii). De pildă, să umplem o foaie de hîrtie (planul întreg chiar) cu litera L (eventual decupată în foaie). Este clar că se poate face acest lucru, toate literele vor putea fi așezate una lângă cealaltă fără conflicte, toate fiind adică scrise corect. În plus, privind foaia de pe partea cealaltă, toate literele se vor vedea răsturnate, de forma J. Se spune că foaia de hîrtie (planul, la fel sfera și alte suprafețe) este orientabilă. Dacă încercăm însă să umplem o bandă a lui Moebius cu litera L, atunci, după un număr de litere, vom ajunge în locul de plecare, dar... lângă o literă scrisă de-a-ndoașelea (figura 23.6). Banda lui Moebius nu este orientabilă.

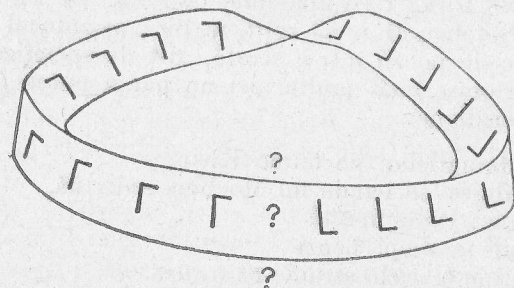


Fig. 23.6

În încheiere, iată încă o problemă care pe banda lui Moebius este „altfel“. Fie cinci puncte în plan. Să ne propunem să unim oricare două puncte între ele cu o linie (de orice formă). Obținem ceea ce se numește un graf (vezi secțiunea 25.2). Ei bine, este demonstrat de destulă vreme (Kuratowski) că nu putem uni cele cinci puncte așa cum ne-am propus fără a intersecta cel puțin două linii (figura 23.7). (Se spune că graful obținut nu este planar.)

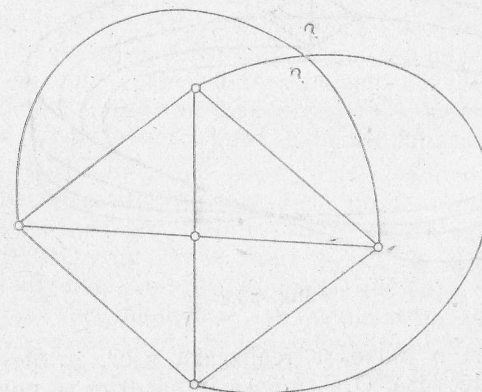


Fig. 23.7

Dacă ne propunem să rezolvăm problema pe o bandă a lui Moebius, atunci putem realiza acest lucru fără nici o intersecție — a se vedea figura 23.8.

Am mai vorbit despre folosirea benzii lui Moebius și a sticlei lui Klein ca obiecte de recuzită în serierile S.F. Iată încă un exemplu. În cartea lui Dan Lăzărescu, citată deja, apare traducerea unei povestiri S.F. de... Martin Gardner, intitulată „Profesorul fără nici o parte“ și a cărei acțiune este bazată pe următoarea extrapolare. Așa cum banda lui Moebius nu are decît o parte, deși orice inel obișnuit de hîrtie are două, și așa cum sticla lui Klein etc..., la fel se poate construi un corp care nu mai are nici o parte. Reușita aparține „profesorului polonez Slapenarski“, iar construirea unui

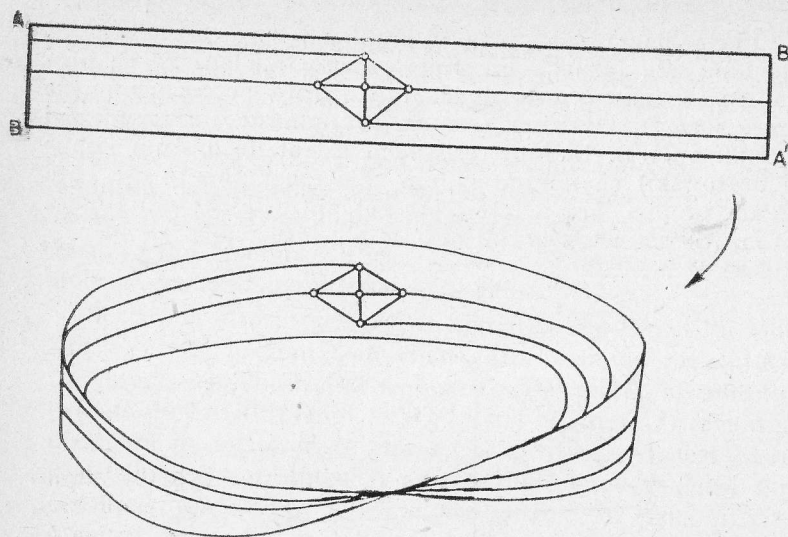


Fig. 23.8

corp fără nici o parte se realizează ușor, printr-o simplă împăturire adecvată. O asemenea împăturire se poate aplica chiar și unui om, fapt care poate avea consecințe dezagrebile pentru el: pierderea tuturor părților atrage după sine trecerea într-o altă dimensiune a spațiului, cu contuziile probabile pe care un asemenea gest le presupune, cu pierderea hainelor (hainele nu-și pierd părțile!) și cu revenirea în spațiul cu trei dimensiuni fără acoperământ și nu neapărat în locul de plecare... Din fericire, corpul fără nici o parte este o ficțiune a lui Martin Gardner...

24. MATEMATICA ȘI CRIPTOLOGIA

Despre descifrarea mesajelor scrise se vorbește mult mai des decât despre încifrarea unor asemenea mesaje. Într-adevăr, nu numai textele încifrate trebuie descifrate, ci și cele scrise

în „coduri“ ale căror gramatici și dicționare s-au pierdut. Scrierea cuneiformă, hieroglifele, însemnările de pe Poarta Soarelui sau de pe alte monumente Latino-Americane, înțelesul sforilor cu noduri din aceeași zonă geografică și multe alte „scrieri“ și-au pierdut pentru noi înțelesul, cei care le-au „scris“ s-au pierdut ei înșiși în ceața timpului, astfel încât astăzi cifrurile cele mai sofisticate pălesc de invidie în fața cifrurilor antice. Dar nu despre asemenea coduri și cifruri involuntare va fi vorba în cele ce urmează, ci despre cifrurile în sensul cărților, seriălor — de film sau din reviste — de spionaj, cele în care textele se cifrează pentru a nu fi înțelese de către altcineva decât de destinatar. (De cifruri se ocupă și un capitol al enigmisticii; a se vedea Gheorghe Sanda, *Ghidul enigmistului*, Editura Albatros, București, 1971.)

Folosirea cifrurilor nu este însă numai un obicei diplomatic sau militar. În ultimul timp, odată cu răspândirea calculatoarelor, s-au creat mari bănci de date conținând informații diverse, despre oameni și instituții, date depozitate pe suporturi magnetice sau în memoria calculatoarelor și care nu trebuie lăsate la îndemina oricui. Să ne amintim că C.E.C.-ul, de exemplu, garantează secretul operațiunilor bănești ale fiecărui depunător. Orice sistem informatic al C.E.C.-ului trebuie deci protejat împotriva accesului neautorizat la informațiile stocate în el. Pe lângă măsurile administrative referitoare la persoanele care au posibilitatea fizică să intre în posesia unor asemenea informații, o cale simplă de protejare a lor este stocarea cifrată, astfel încât o persoană care nu cunoaște algoritmul de cifrare să nu poată „citi“ datele pe care eventual le poate vedea.

Probabil că nu există sisteme de încifrare care să nu fie mai mult sau mai puțin matematice (în esența lor, dacă nu chiar în formă). Intervenția matematicii în această problemă este foarte variată: formularea de sisteme de cifrare, de sisteme de descifrare, evaluarea siguranței cifrurilor etc. Teoria numerelor, complexitatea calculatorului, combinatorica, teoria informației, joacă roluri fundamentale în constituirea științei cifrării și descifrării: criptologia.

Se spune adesea că nu există cifru care să nu poată fi dezlegat, că nu există cifru perfect. Probabil că afirmația este adevărată la modul foarte general, al nivelului de algoritmicitate a descifrării. Un cifru nu trebuie însă să fie „indescifrabil” pentru că atunci va fi foarte probabil nedescifrabil sau greu descifrabil (utilizabil) chiar și pentru cei cărora le folosește, destinatarului în primul rând. Apar astfel caracteristici contradictorii în evaluarea unui cifru: el trebuie să fie cât mai sigur (pentru a nu putea fi dezlegat de cine nu trebuie), dar nu prea complicat (pentru a putea fi utilizat cu ușurință), „cheia” lui să nu fie accesibilă oricui, dar să fie ușor de folosit (de transmis și de memorat, eventual). Așa se face că un cifru „perfect” pare să nu existe, chiar dacă „există cifruri pentru descifrarea cărora este nevoie de milioane de ani” (chiar așa se numește un articol al lui Martin Gardner apărut în „Scientific American”, august 1977, p. 120—124).

În orice caz, o analiză matematică atentă face ca într-adevăr multe cifruri care intuitiv par de nepătruns să fie (în anumite condiții) extrem de ușor de dezlegat.

În continuare voi da un asemenea exemplu, tratat în detaliu, referitor la cifruri de tip Vigenère (Blaise de Vigenère, 1523—1596, scriitor, diplomat, curtezan și savant, autorul unui „Tratat de cifruri” publicat în anul 1586. Conform ideilor lui, în secolul trecut s-au pus la punct tabele Vigenère, ca cel care urmează.)

Un cifru de tip Vigenère presupune folosirea unei chei alfabetice sub forma unui cuvânt cu sens, a unei fraze sau pur și simplu a unui șir de litere. Pentru încifrare, literele cheii se „adună” cu literele textului de cifrat, iar la descifrare se „scad” din literele textului cifrat. Aceste adunări și scăderi de litere se fac conform unor tabele ale adunării și scăderii, matrice cu câte 26 de linii și 26 de coloane (pentru un alfabet cu 26 de litere) care la intersecția unei linii cu o coloană conțin litera care dă „suma” literelor asociate liniei și coloanei respective. O asemenea sumă poate fi cea modulo 26, considerând deci literele A, B, ..., X, Y, Z ca având respectiv valorile 0, 1, 2, ..., 23, 24, 25. Dându-se o literă, M

să zicem, din textul de cifrat și o altă literă, de exemplu C, din cheia, facem suma numerelor asociate, $12 + 2$, și obținem 14, număr corespunzător literei O. Dacă adunăm pe M ($= 12$) cu $T = (19)$, atunci obținem $12 + 19 = 31$. Restul împărțirii lui 31 la 26 este 5; spunem că 31 este echivalent (congruent) cu 5 modulo 26. Din suma lui M cu T obținem deci litera F ($= 5$).

Mai jos este prezentat un tabel Vigenère, chiar în genul exemplului anterior (bazat pe suma modulo 26). Descifrarea unui text cifrat cu ajutorul unui asemenea tabel pare a fi destul de grea în absența tabelului și a cheii. Și totuși... Să presupunem că avem deja câteva informații: în primul rând cunoaștem un text cifrat în care bănuim că ar putea apare anumite cuvinte. Evident, este greu de localizat aceste cuvinte în text, deși putem încerca acest lucru în mod sistematic și cu oarecare efort (și noroc) am putea afla astfel cheia. Dar să presupunem în plus că știm lungimea cheii. Nu cheia, ci atît, lungimea ei. În acest moment, șansele de descifrare au crescut considerabil, deși la prima vedere informația pe care ne-o aduce lungimea cheii este nesemnificativă.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
A	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
B	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A
C	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B
D	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C
E	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D
F	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E
G	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F
H	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G
I	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H
J	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I
K	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
L	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
M	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
N	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
O	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
P	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
Q	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
R	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
S	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
T	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
U	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
V	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
W	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
X	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
Y	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X
Z	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y

Iată acum un exemplu concret:

— textul cifrat cunoscut este:

*ARAMXXDIXOGWMRVRZITYODIVVDEJI DAIMEC
ZGJWZMVZW HGXOGRULVQGXSYEMZKMGR*

— lungimea cheii: 9,

— presupunem că în textul în clar există cuvântul *MATEMATICIAN*. Având aceste informații, putem raționa astfel. Cuvântul *MATEMATICIAN* are lungimea 12. Prin urmare, la cifrarea lui, cheia, care este de lungime 9, s-a folosit de două ori, mai exact, există trei litere în cheie care s-au folosit atât pentru a cifra primele trei litere din *MATEMATICIAN* cât și pentru ultimele trei. Să notăm cu a_1, a_2, a_3 aceste litere din cheie. În textul cifrat apar deci literele obținute prin însumările

$$M + a_1, A + a_2, T + a_3$$

$$I + a_1, A + a_2, N + a_3$$

(Am făcut aici un abuz de notație, identificând suma literelor cu suma modulo 26 între numerele corespunzătoare lor în tabelul Vigenère.)

Scrierea anterioară a celor șase adunări sugerează pasul următor în direcția aflării locului cuvântului *MATEMATICIAN* în textul cifrat: scăzând din prima linie elementele liniei a doua, termen cu termen, literele a_1, a_2, a_3 , necunoscute de fapt, se reduc și obținem

$$M - I, A - A, T - N$$

Să evaluăm numeric aceste diferențe, folosind tabelul anterior ($A = 0, I = 8, M = 12, N = 13, T = 19$). Obținem

$$M - I = 12 - 8 = 4$$

$$A - A = 0 - 0 = 0$$

$$T - N = 19 - 13 = 6$$

Să ne gândim acum la textul cifrat. După ce s-a folosit în cifrarea primelor nouă litere, cheia s-a folosit în cifrarea celorlalte nouă și așa mai departe. Făcând deci o „scădere“ a literelor „din nouă în nouă“, iarăși eliminăm cheia, deci obținem cifre cu aceeași semnificație ca cea de la primul pas, cînd am evaluat diferențele $M - I, A - A, T - N$. Cu alte cuvinte, acolo unde vom găsi o secvență de cifre 406, în acel loc în textul inițial se găseau literele MAT.

Să facem deci diferențele „din nouă în nouă“ în textul cifrat:

$$A - O = 0 - 14 = 26 - 14 = 12.$$

(Diferența modulo 26 se face „împrumutîndu-ne“ cu 26 atunci cînd descăzutul este mai mare decît scăzătorul.)

$$R - G = 17 - 6 = 11$$

$$A - W = 0 - 22 = 26 - 22 = 4$$

$$M - M = 12 - 12 = 0$$

$$X - R = 23 - 17 = 6$$

$$X - V = 23 - 21 = 2$$

$$D - R = 3 - 17 = (3 + 26) - 17 = 29 - 17 = 12$$

$$I - Z = 8 - 25 = (8 + 26) - 25 = 9$$

$$X - I = 23 - 8 = 15$$

Nu este nevoie să mergem mai departe. Am găsit deja o secvență 406. Am localizat astfel literele MAT în textul inițial. Să presupunem că întreg cuvântul *MATEMATICIAN* se găsește acolo, deci avem

ARAMXXDIXOGWMRVR...

... MATEMATICIAN....

Să căutăm atunci cheia. Știînd că prin adunarea cheii la *MATEMATICIAN* am obținut *AMXXDIXOGWMR*, rezultă că prin scăderea cuvîntului *MATEMATICIAN* din textul cifrat obținem cheia. Să facem acest lucru:

$$A - M = 0 - 12 = 26 - 12 = 14 = 0$$

$$M - A = 12 - 0 = 12 = M$$

$$\begin{aligned}
X - T &= 23 - 19 = 4 = E \\
X - E &= 23 - 4 = 19 = T \\
D - M &= 3 - 12 = 29 - 12 = 17 = R \\
I - A &= 8 - 0 = 8 = I \\
X - T &= 23 - 19 = 4 = E \\
O - I &= 14 - 8 = 6 = G \\
G - C &= 6 - 2 = 4 = E \\
W - I &= 22 - 8 = 14 = O \\
M - A &= 12 - 0 = 12 = M \\
R - N &= 17 - 13 = 4 = E
\end{aligned}$$

Literele din cheie care s-au repetat în cifrarea literelor din *MATEMATICIAN* sînt deci *OME*. Înainte de ele în cheie, deci folosite la codificarea literelor care apar înainte de apariția lui *MATEMATICIAN* în textul inițial, sînt literele *GE*. Cheia este deci *GEOMETRIE*. Pentru a vedea dacă presupunerea este corectă trebuie să încercăm descifrarea completă a textului. Pentru aceasta, în textul cifrat (egal cu suma dintre textul inițial și cheia) scădem cheia (și va rămîne textul inițial). Iată începutul textului descifrat:

$$\begin{aligned}
A - G &= 0 - 6 = 26 - 6 = 20 = U \\
R - E &= 17 - 4 = 13 = N
\end{aligned}$$

...urmează cuvîntul *MATEMATICIAN*...

$$\begin{aligned}
V - T &= 21 - 19 = 2 = C \\
R - R &= 17 - 17 = 0 = A \\
Z - I &= 25 - 8 = 17 = R \\
I - E &= 8 - 4 = 4 = E \\
T - G &= 19 - 6 = 13 = N \\
Y - E &= 24 - 4 = 20 = U \\
O - O &= 14 - 14 = 0 = A \\
D - M &= 3 - 12 = 29 - 12 = 17 = R \\
I - E &= 8 - 4 = 4 = E \\
V - T &= 21 - 19 = 2 = C \\
V - R &= 21 - 17 = 4 = E \\
D - I &= 3 - 8 = 29 - 8 = 21 = V \\
E - E &= 4 - 4 = 0 = A
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J - G &= 9 - 6 = 3 = D \\
I - E &= 8 - 4 = 4 = E \\
D - O &= 3 - 14 = 29 - 14 = 15 = P \\
A - M &= 0 - 12 = 26 - 12 = 14 = O \\
I - E &= 8 - 4 = 4 = E \\
M - T &= 12 - 19 = 38 - 19 = 19 = T \\
E - R &= 4 - 17 = 30 - 17 = 13 = N \\
C - I &= 2 - 8 = 28 - 8 = 20 = U
\end{aligned}$$

Să vedem ce-a ieșit pînă acum:

UNMATEMATICIANCARENUARECEVADEPOETNU...
Împărțind literele în cuvinte, introducînd deci „litera” spațiu (pe care o puteam chiar include în alfabetul inițial), obținem: *UN MATEMATICIAN CARE NU ARE CEVA DE POET NU...*

Cu descifrarea restului textului sper să se amuze cititorul (dacă nu preferă cumva să caute în secțiunea 28 aforismul lui Weierstrass). De asemenea, sper că exemplul l-a convins pe cititor de capacitatea matematicii de a „sparge” cifruri aparent destul de solide.

25. CE ESTE...?

Așa cum am văzut, este foarte greu, dacă nu chiar imposibil, de definit matematica, de spus în cîteva cuvinte „ce este matematica”. Cu domeniile matematice lucrurile se schimbă, multe dintre ele pot fi ușor definite precizîndu-le obiectul, clasa de obiecte de studiu. Așa, de pildă, teoria limbajelor formale este acea parte a matematicii care se ocupă de studiul generării limbajelor cu ajutorul gramaticilor și de studiul analizei limbajelor cu ajutorul automatelor, teoria catastrofelor se ocupă cu studiul discontinuităților suprafețelor și hipersuprafețelor, teoria grupurilor Lie se ocupă cu studiul... grupurilor Lie etc.

În cele ce urmează voi încerca să răspund la cîteva întrebări de tipul „ce este...?”, alegînd cîteva domenii la care răspunsul poate fi cuprins în cîteva cuvinte și are relevanță pentru spectacolul contemporan al matematicii.

25.1. ...teoria mulțimilor fuzzy?

Unul dintre reproșurile cele mai vehemente pe care „umaniștii“ le aduc matematicii este că ea ar fi prea rigidă, prea nemilos de riguroasă, ajungând din acest motiv să fie nepotrivită pentru modelarea unor fenomene mai diafane, mai flue, cum sînt cele din sfera psihicului, artisticului sau socialului. Reproșul este în mare măsură întemeiat; amintiți-vă ce spuneam în secțiunea 6: „dimensiunea norilor nu se măsoară cu șublerul“. Sînt locuri în care nu precizia este importantă, ci corectitudinea raționamentelor și adecvarea instrumentelor. Iar apropo de adecvare, modelele matematice sînt inerent reduționiste, ele sînt abstractizări, reduceri la o schemă comună (esențială, ce este drept) a mai multor fenomene. Nici nu s-ar putea altfel. Pentru a putea modela activitatea unui voiajor comercial, de exemplu, nu ne mai gîndim la nimic altceva decît la faptul că el *există*, este *unul singur*, *se mișcă* între anumite localități folosind anumite drumuri. Problemele personale ale voiajului ca individ, localitățile și drumurile altfel decît ca puncte și linii pe o hartă nu ne interesează. Numai după o asemenea „epurare de concret“ poate matematica să fie utilă, să propună metode de rezolvare și soluții problemelor care i se pun în față, metode și soluții care apoi pot fi utilizate în oricare altă situație în care epurarea de realitate conduce la aceeași schemă a „punctului care se mișcă între puncte pe o rețea de drumuri“.

Ce ne facem însă cu psihicul, artisticul și socialul? Aceste domenii există, au probleme și matematica este chemată să le ajute.

Cerința creării unei „noi matematici“, potrivită aspectelor imprecise (în sens larg) ale naturii și societății a fost resimțită de mult timp. Imprecizia de tip aleator a dus la nașterea și dezvoltarea teoriei probabilităților, ramură a matematicii deja clasică. Există însă numeroase alte tipuri de imprecizie (inventariate undeva de către profesorul Solomon Marcus): ambiguitatea (studiată de către lingviști, dar încă insuficient studiată matematic), nedeterminismul (una dintre

marile probleme ale teoriei mașinilor matematice), gradualitatea. Despre aceasta din urmă vreau să vorbesc mai departe.

Matematica clasică poate fi în întregime formulată (sau reformulată) folosind limbajul teoriei mulțimilor așa cum a fost ea dezvoltată de Cantor și axiomatizată de Zermelo și Fraenkel. Vă amintiți, nu? ce este o mulțime: o clasă de obiecte, o grămadă,... o *mulțime* de obiecte. Mai exact, nu ne interesa natura obiectelor, ci faptul că ele se deosebesc unele de altele și că *aparțin* sau *nu aparțin* mulțimii. Mulțimea tuturor oamenilor care se numesc Ionescu este clară, mulțimea ferestrelor unei camere, de asemenea. Ba chiar și mulțimea tuturor oamenilor din Marte este clară, nu conține nici un element, este mulțimea vidă, dar ea este precis definită.

Să ne gîndim însă la alte exemple, mai puțin utilizate (și pe bună dreptate) de către profesorii de matematică în școală. De pildă, „mulțimea tuturor numerelor mari“. Din ce elemente este ea formată? Numărul 100 este mare sau nu? Dar 100^{100} ? Depinde de context. Este clar că 100^{100} este „mai mare“ decît 100, dar pentru un copil de cinci ani ambele numere sînt la fel de mari, sînt infinite. (Așa cum pentru egipteni, orice număr mai mare decît 10 000 era infinit.) O încurcătură similară produce „mulțimea numerelor mici“. În viața de toate zilele 1, 2, 3 sînt numere mici, dar pentru un fizician, obișnuit cu raze de atomi, raze de nuclee atomice etc., „micul“ începe de la 10^{-6} în jos.

Să ne amintim în acest context și de *paradoxul chelului*: dacă unui om îi smulgi 1, 10, 100, chiar 1 000 sau mai multe mii de fire de păr, el nu devine chel dacă mai înainte nu era deja chel. Există însă oameni cu chelie. Cîte fire trebuie să smulgem unui om pentru a-l face chel din nechel? Nimeni nu poate indica un prag (experimentele sînt destul de dezagreabile, vă dați seama...). La fel, nu putem face dintr-un

chel un nechel lipindu-i pe cap 1, 10, 100, 1 000 de fire de păr. Ce elemente are atunci „mulțimea oamenilor cheli“?

Mulțimea numerelor mari sau mici, mulțimea oamenilor cheli sau necheli, a oamenilor înalți sau scunzi, tineri sau bătrini și altele la fel sînt „mulțimi“ numai pentru limbajul uzual, nu și în sens matematic. Ele nu sînt bine definite, granița lor nu este vizibilă, pur și simplu nu există o asemenea graniță care să separe ceea ce aparține mulțimilor de ceea ce nu le aparține. Asemenea mulțimi apar însă în mod natural în numeroase situații. Cum putem să le aducem pe masa de lucru a matematicii, să le modelăm, să le formalizăm și astfel să le punem la baza unei teorii a conceptelor graduale, a unei matematici graduale? Soluția o putem întui ușor cu ajutorul unui... șarpe!

Să ne punem problema definirii „mulțimii tuturor șerpilor dintr-un cerc desenat pe nisip“. La început cercul este gol, deci mulțimea este vidă. Un șarpe se apropie de cerc. Cît timp el este complet afară, este clar, el nu aparține mulțimii pe care o căutăm. Șarpele începe însă să se tirească și să intre în cerc. Atunci cînd el va fi complet intrat înăuntru, situația va fi din nou fără echivoc, șarpele va aparține mulțimii noastre. Ce facem însă cînd el este intrat numai cîtiva centimetri, un sfert din lungimea lui, jumătate, trei sferturi din lungime? Este el atunci în mulțime sau nu? Întrebarea este echivalentă cu „este el atunci în cerc sau nu?“. La a doua întrebare este ușor de răspuns: da, șarpele este în cerc, mai întii cîtiva centimetri, apoi pe sfert, pe jumătate, pe trei sferturi... Aha, deci șarpele aparține mulțimii pe sfert, pe jumătate, pe trei sferturi...

Aceasta este soluția! Apartenența la mulțime nu mai este o proprietate dihotomică, pe care obiectele o au sau nu o au, ea devine graduală. Un obiect poate fi în mulțime într-un anumit raport, mai mult sau mai puțin decît altul, între apartenența zero (neapartenență) și apartenența totală.

Mulțimea șerpilor din cerc nu mai este formată pur și simplu din șerpi, ci din *grade de apartenență* ale șerpilor. Fiecare șarpe are asociat un număr cuprins între 0 și 1,

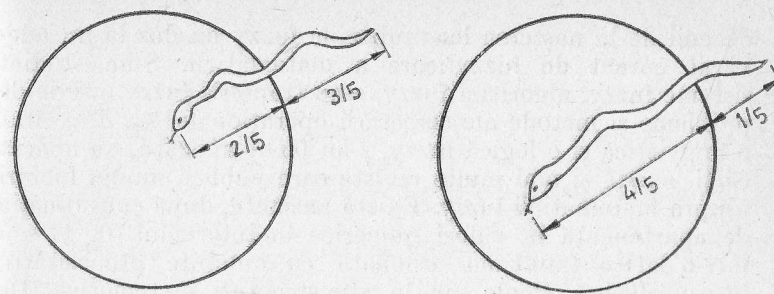


Fig. 25.1

indicînd gradul în care el aparține sau nu mulțimii. Să observăm că tot timpul „mulțimea șerpilor din cerc“ a fost gîndită ca *mulțime de șerpi*, raportată deci la o mulțime bine precizată, cea a tuturor șerpilor de pe Pămînt, de exemplu. Cu alte cuvinte, toți șerpii de pe Pămînt au înscrisi pe ei un număr (cei care nu ating cercul, numărul zero), mulțimea șerpilor din cerc fiind, de fapt, formată din toate aceste numere (majoritatea zero).

Exact acest lucru este o mulțime fuzzy. În raport cu o mulțime totală, clasică, X , se ia o funcție $f: X \rightarrow [0, 1]$ și se gîndesc valorile ei, $f(x)$, x din X , ca grade de apartenență la o mulțime A_f , identificată deci de funcția f .

Să ne reamintim de cazul mulțimilor „clasice“ în care apartenența este dihotomică. Și în acel caz putem defini o funcție de apartenență (a făcut-o Charles de la Vallée Poussin în secolul al XIX-lea) și anume, pentru o mulțime A , punem $f(x) = 1$ dacă x este în A și $f(x) = 0$ în cazul contrar. Definiția mulțimilor fuzzy este deci consistentă cu cazul clasic, orice mulțime în sens obișnuit fiind o mulțime fuzzy particulară.

Teoria mulțimilor fuzzy se ocupă cu studiul mulțimilor fuzzy (truism), cu construirea unei matematici fuzzy, paralelă cu matematica ne-fuzzy. Teoria a fost inițiată de către inginerul american Lofti Zadeh („Fuzzy sets“, *Information and Control*, 8 (1965), 338–363) și în cele mai puțin de două

decenii de la nașterea lor mulțimile fuzzy au dus la un adevărat curent de fuzzyficare a matematicii. S-au studiat sisteme fuzzy, algoritmi fuzzy, s-au transcris fuzzy o serie de probleme și metode ale cercetării operaționale, s-a dezvoltat o lingvistică și o logică fuzzy, s-au făcut aplicații, au apărut cărți, există și mai multe reviste care publică numai lucrări asupra matematicii fuzzy. Există variante, după cum funcția de apartenență ia valori numerice în intervalul $[0, 1]$ sau într-o latice (mulțime ordonată cu anumite proprietăți), într-o algebră Boole sau în alte structuri matematice. De interes sînt și mulțimile în care apartenența nu este continuă, ci discretă, cu valori într-o mulțime precizată de numere (trepte de apartenență). Așa cum teoria clasică a mulțimilor se sprijinea pe logica bivalentă în care o propoziție nu poate fi altfel decît sau adevărată sau falsă, teoria mulțimilor fuzzy corespunde logicilor continue, eventual logicilor n -valente, în care între adevăr și fals există trepte de veridicitate, de plauzibilitate, de adevăr și falsitate.

Înainte de a încheia aceste referiri la teoria mulțimilor fuzzy, să ne amintim cum se obțineau reuniunea și intersecția mulțimilor obișnuite: se puneau împreună toate elementele aparținînd cel puțin unei mulțimi (reuniune), respectiv, tuturor mulțimilor (intersecție). La ce ar corespunde în cazul fuzzy expresia „aparține cel puțin unei mulțimi”? În cazul clasic, neapartenența la o mulțime se reformulează prin „are gradul de apartenență zero”. Nu ne deranjează deci că un obiect are gradul de apartenență zero în raport cu toate mai puțin o mulțime, în reuniune el este luat totuși în considerație. În același mod, reuniunea a două (sau mai multe) mulțimi fuzzy se face construind o funcție de apartenență la mulțimea-reuniune care să ia ca valori maximul valorilor funcțiilor de apartenență ale mulțimilor reunite:

$$f_{A \cup B}(x) = \max(f_A(x), f_B(x)).$$

Analog se întîmplă cu intersecția; pe principiul că „tăria unui lanț este egală cu tăria celei mai slabe dintre zalele sale”, apartenența la intersecție este egală cu minimul apartenențelor la mulțimile inițiale.

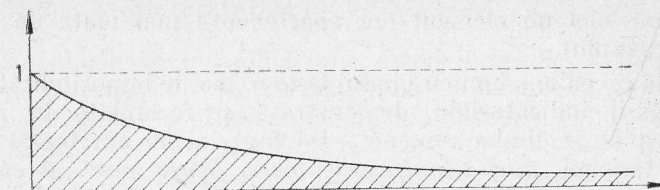


Fig. 25.2

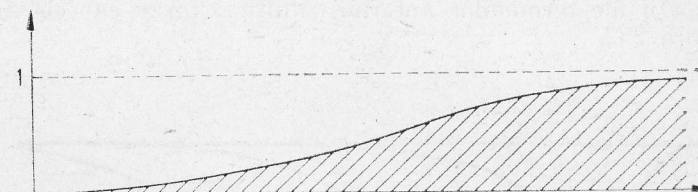


Fig. 25.3

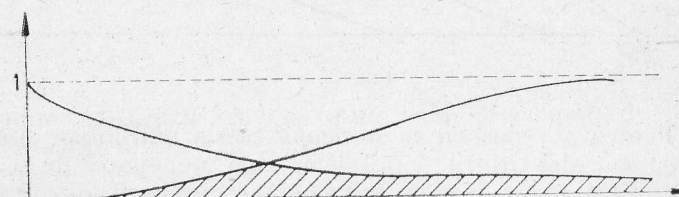


Fig. 25.4

De pildă, dacă mulțimea numerelor mici ar fi caracterizată de funcția de apartenență cu graficul din figura 25.2, iar mulțimea numerelor mari de funcția cu graficul în figura 25.3, atunci intersecția celor două mulțimi fuzzy corespunde funcției de apartenență reprezentată de graficul din figura 25.4.

Nu știu cum ar putea fi numită această mulțime; poate mulțimea numerelor care sînt și mari și mici. Paradoxul este evitat de faptul că această mulțime nu este clasică, ea nu

conține nici un element (cu apartenența mai mare de 0.5 de exemplu).

Să revenim acum cu gândul la teorema de imposibilitate a agregării indicatorilor, demonstrată și formulată în secțiunea 6 „în limba română”. De fapt, acolo am lucrat cu acei termeni, *mic*, *semnificativ*, *mare*, *foarte mare*, al căror înțeles era cel din limba română, dar care pot fi definiți matematic prin intermediul mulțimilor fuzzy. Demonstrația va putea fi atunci făcută riguros, de exemplu, luând ca semnificații ale termenilor anteriori mulțimi fuzzy ca cele din figura 25.5.

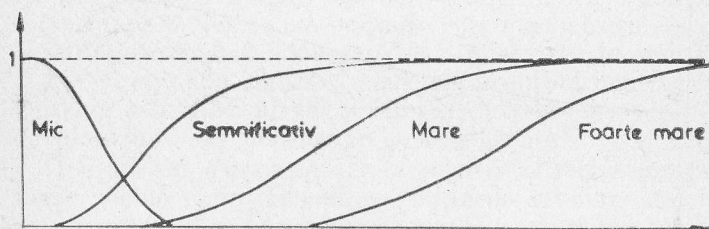


Fig. 25.5

Pentru a vedea cu ce se ocupă teoria mulțimilor fuzzy, să reluăm aici titlurile capitolelor unei monografii de teoria mulțimilor fuzzy, cea a lui Constantin Virgil Negoită și Dan Ralescu, *Mulțimi vagi și aplicațiile lor* (Editura tehnică, București, 1974), una din primele monografii în acest domeniu: Mulțimi fuzzy (funcția de apartenență, relații fuzzy, spații topologice fuzzy, categorii fuzzy, probabilitate și entropie fuzzy, mulțimi fuzzy dependente de timp), Logică fuzzy (validitate și consistență fuzzy, principiul rezoluției, logica fuzzy și logici continue), Limbaje formale fuzzy (semantică fuzzy, sintaxă fuzzy), Teoria automatelor fuzzy (automate fuzzy finite, automate probabilistice finite), Sisteme și decizii fuzzy (algoritmi fuzzy, decizii fuzzy), Sisteme de comutație, Regăsirea informațiilor (clasificare automată fuzzy).

25.2. ...teoria grafurilor?

Topologia își revendică una dintre originile ei în „problema podurilor din Königsberg” (azi Kaliningrad), problemă aproape nelipsită din cărțile de matematică popularizată, distractivă etc. Ea se referă la următoarea situație (figura 25.6). Pe riul Pregel care traversa orașul se găseau două insule. Șapte poduri legau aceste insule între ele și de maluri.

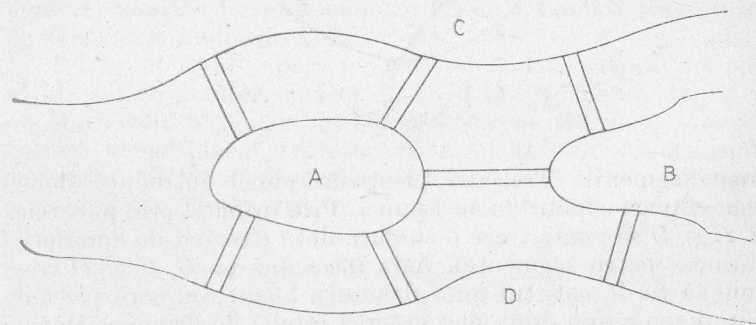


Fig. 25.6

Locuitorii orașului erau de mult timp preocupați de posibilitatea de a traversa toate podurile, trecând o singură dată pe fiecare, însă problema continua să refuze să-și dezvăluie soluția. În anul 1736 Leonard Euler demonstrează însă că nu există o asemenea soluție. Raționamentul lui Euler a fost următorul. Să desenăm o hartă a drumurilor pe care le avem de făcut între maluri și insule pe cele șapte poduri. Figurind cu cite un punct malurile și insulele și cu cite o linie drumurile între ele, obținem o schemă ca cea din figura 25.7.

De fapt, fiecare linie în această schemă corespunde unui pod. Problema podurilor este deci echivalentă cu problema parcurgerii cu creionul a tuturor segmentelor schemei, fără a trece de două ori pe un segment. Să observăm însă că din punctele B, C și D pleacă câte 3 segmente, iar din A pleacă

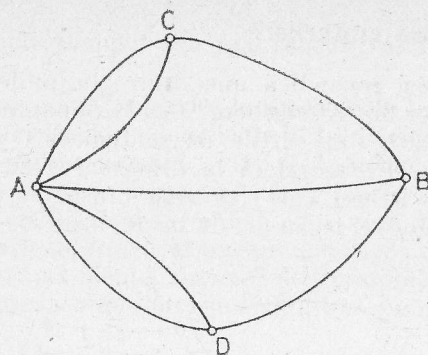


Fig. 25.7

cinci segmente. Trecerea printr-un punct introduce două segmente cu capătul în acel punct. Prin urmare, prin punctele B , C și D se poate trece o singură dată (trecând de două ori, obținem patru segmente). Asta înseamnă că B , C și D trebuie să fie la capătul unor drumuri, locuri din care plecăm inițial sau sosim după parcurgerea rețelei de drumuri. Dar... orice linie are numai două capete, martor ne este Euclid cu una dintre premisele geometriei sale. Rețeaua de drumuri nu poate fi parcursă fără a ridica creionul de pe hirtie, deci podurile nu pot fi traversate fără a... sări cel puțin o dată de pe un mal pe altul, de pe un mal pe o insulă...

De fapt, Euler dă condiții necesare și suficiente pentru ca o rețea similară de drumuri să poată fi parcursă dintr-o singură trăsătură de creion fără a repeta porțiuni ale drumului: problema are soluție dacă și numai dacă în toate punctele rețelei, mai puțin eventual două dintre ele, există un număr par de drumuri incidente. (Dacă există două noduri „impare“, atunci trasarea rețelei trebuie începută într-unul dintre aceste puncte și se va termina în celălalt.)

Cu problema podurilor din Königsberg și cu metoda lui Euler de rezolvare a ei după reducerea la o figură formată din puncte legate prin linii se poate însă spune la fel de bine că s-a născut și teoria grafurilor nu numai topologia.

Lucrarea lui Euler referitoare la podurile din Königsberg a fost destul de puțin cunoscută mai multe decenii după apariția ei. În anul 1851, Coupy publică o traducere în franceză a ei, prilej cu care rezolvă și unele probleme similare referitoare la podurile de pe Sena. În aceeași vreme, Poincaré, Clausen și Listing se ocupă de probleme de trasare a unor figuri fără a ridica creionul de pe hirtie și fără a repeta porțiuni ale desenului, iar Cayley introduce termenul de „arborescență“ și numără formule chimice folosind tehnici dezvoltate de el pentru numărarea de arbori.

Termenul „graf“ apare pentru prima dată într-un articol al lui J.J. Sylvester, apărut în 1878 în „American Journal of Mathematics“: „On an application of the new atomic theory to graphical representation of the invariants and covariants of binary quantics“. Încă o dată, viitoarea teorie a grafurilor a fost motivată și inspirată de probleme puse de chimie.

Sintagma „teoria grafurilor“ a apărut însă mult mai târziu, adică exact la două sute de ani de la rezolvarea problemei podurilor din Königsberg. Timp de 200 de ani s-a făcut teorie a grafurilor fără a se numi astfel ceea ce s-a făcut. Este adevărat, abia D. König, cel care în anul 1936 publică lucrarea *Theorie der Endlichen und Unendlichen Graphen*, Akad. Verlag, M.B.H. Leipzig, este primul matematician care studiază sistematic proprietățile grafurilor încheind o teorie a lor, referirile anterioare fiind întâmplătoare, sporadice și abia ulterior încorporate în teoria grafurilor. „În ultimii ani cercetările în teoria grafurilor au atins proporții uimitoare. Teoria grafurilor, un «tinerel» în lumea matematicii, s-a dovedit atât un important instrument în afara matematicii, cât și o ramură excitantă a matematicii“. (Din prefața la cartea *Graphs & digraphs* de M. Behzad, G. Chartrand, L. Lesniak-Foster, Prindle, Weber & Schmidt International Series, Boston, 1979.)

Am afirmat mai sus că teoria grafurilor începe cu lucrarea lui Euler din 1736. Într-adevăr, figura 25.7 reprezintă un graf neorientat, căci chiar aceasta este un graf: o mulțime de puncte legate prin linii (neorientate, numite muchii)

sau prin săgeți (linii orientate, numite arce). De fapt, figura 25.7 reprezintă un *multigraf*, deoarece punctele A și C precum și A și D sunt legate prin câte două muchii, fiecare purtând numele podului cărui îi corespunde (muchiiile sunt deci marcate, nu se confundă, așa cum s-ar întâmpla dacă ele ar fi precizate numai prin punctele aflate la extremități). Un graf orientat este redat în figura 25.8.

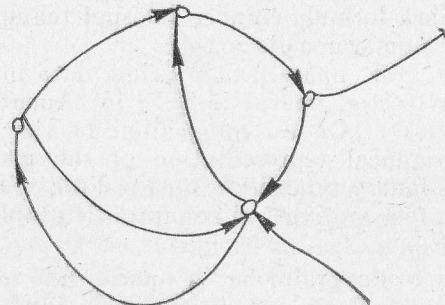


Fig. 25.8

În cele ce urmează, nu voi face precizări în plus cu privire la problemele și metodele teoriei grafurilor. În „colaborare” cu topologia, cu combinatorica, cercetările operaționale, algebra, teoria limbajelor formale, teoria automatelor, teoria deciziei etc. teoria grafurilor s-a dezvoltat foarte mult, beneficiind de metodele altor ramuri ale matematicii, dar fiind de foarte multe ori și un foarte util mijloc de rezolvare a unor probleme ale altor domenii. Ea este în mod deosebit utilă în aplicații practice dintre cele mai diferite, pe de o parte datorită faptului că structuri de puncte și linii de legătură pot fi găsite în nenumărate situații, pe de altă parte, datorită caracterului intuitiv pe care îl are, faptului că se poate adesea raționa pe grafuri desenate, nu numai în simboluri. Este ceea ce voi încerca să ilustrez în continuare, aducând la teoria grafurilor probleme dintre cele mai diverse.

Primele probleme care se oferă pentru a fi modelate prin grafuri sunt cele referitoare la rețele de drumuri ce leagă

diferite localități. (Una este cea a podurilor din Königsberg.) Orice hartă este un graf (dacă ignorăm toate indicațiile ei mai puțin căile de comunicație și localitățile). Drumul minim (ca lungime), drumul cel mai ieftin (adesea nefiind cel mai scurt) între două puncte, drumul maxim (ca lungime sau cost), drumuri cu diverse alte proprietăți, pot fi găsite cu ajutorul grafurilor.

Iată însă o situație în care structura de graf nu mai este vizibilă. Să ne gândim din nou la problema celor patru culori. Oricărei hărți i se poate asocia un graf (dual) în care fiecare regiune este reprezentată printr-un punct și două puncte vor fi legate printr-o muchie dacă și numai dacă punctele corespund la două regiuni vecine (figura 25.9).

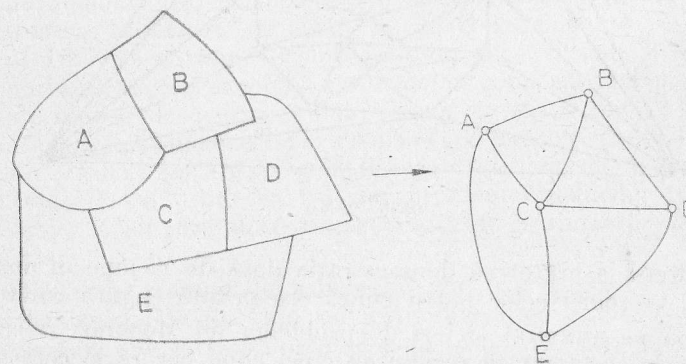


Fig. 25.9

În felul acesta, problema colorării regiunilor de pe hartă revine la problema „colorării” punctelor din graful asociat astfel încât puncte adiacente (legate printr-o muchie) să fie colorate diferit. Problema celor patru culori a dat astfel naștere la numeroase cercetări referitoare la „numerele cromatice” ale grafurilor.

Să desenăm în acest context un graf interesant în sine, dar și din punct de vedere istoric și anume graful pe care

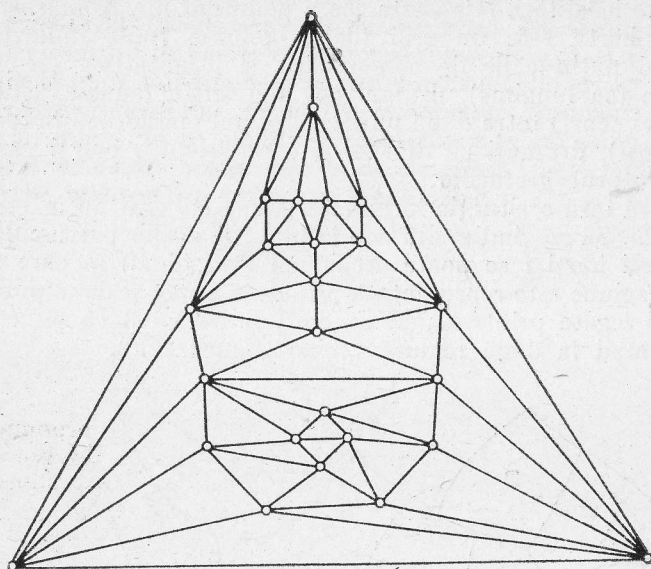


Fig. 25.10

Heawood a arătat că demonstrația dată de Kempe în anul 1879 teoremei celor patru culori era greșită (figura 25.10).

Să ne amintim aici și de problema lui Moebius, referitoare la testamentul regelui cu cinci copii cărora le cere să împartă regatul în cinci regiuni două câte două adiacente. În termeni de grafuri, condiția răutăciosului rege revine la a construi un graf cu cinci noduri care este complet (oricare două noduri sînt legate printr-o muchie) și în același timp este planar (liniile nu se intersectează). Un asemenea graf nu există. Probabil că cei cinci moștenitori au așteptat pînă au devenit patru sau chiar au aranjat între ei — printr-un mic război, de exemplu — să rămînă patru... Graful complet cu patru noduri este, într-adevăr, planar.

Există o veche problemă de șah care cere să se acopere o tablă de șah cu un cal, să se plece adică dintr-o căsuță

și să se facă exact 63 de mutări cu calul, de fiecare dată într-o căsuță prin care nu s-a mai trecut. Problema are o sumedenie de răspunsuri. Ea poate fi redusă la o problemă de grafuri, astfel. Considerăm 64 de puncte, identificate prin $a_1, a_2, \dots, a_{64}$, la fel ca cele 64 de pătrate ale tablei de șah. Între aceste puncte trasăm muchii, unind acele căsuțe care pot fi unite printr-o mutare a calului (a_1 cu c_2 și cu b_3 , a_2 cu c_1 , c_3 și cu b_4 etc.). Acoperirea tablei cu ajutorul calului se reduce atunci la problema găsirii unui drum care să treacă o singură dată prin toate punctele grafului obținut (atenție!, problema podurilor din Königsberg permitea trecerea de mai multe ori printr-un punct, pe un mal sau pe o insulă; în cazul calului acest lucru nu mai este admis). Un asemenea drum care trece o singură dată prin toate nodurile unui graf se numește *drum hamiltonian* (de la următoarea problemă enunțată — și comercializată — în anul 1857 de matematicianul irlandez Sir William Rowan Hamilton: se dau douăzeci de orașe pe glob situate în virfurile unui dodecaedru regulat — corp geometric cu 12 fețe pentagonale și douăzeci de virfuri — se cere un drum care să treacă o singură dată prin fiecare dintre aceste douăzeci de orașe). Un drum ca cel din problema podurilor (care folosește o singură dată fiecare muchie) se numește *drum eulerian*.

Problema voiajorului comercial (am mai amintit de ea) revine tocmăi la a căuta un drum hamiltonian de durată (cost, lungime etc.) minimă într-un graf dat (orientat sau nu). Există și alte probleme care cer găsirea de drumuri hamiltoniene. Să considerăm de exemplu mai multe piese, $p_1, p_2, \dots, p_n$, care trebuie prelucrate pe o mașină. După ce a prelucrat o piesă de un tip oarecare, mașina trebuie readaptată pentru a putea prelucra o altă piesă. Pentru unele perechi de piese o asemenea adaptare este atât de costisitoare încît o putem considera imposibilă. Asociind fiecărei piese un punct, putem trasa un graf (orientat) ducînd o săgeată de la un punct la altul atunci cînd mașina poate trece de la o piesă la cealaltă pentru prelucrare. Fiecare arc în acest graf va fi marcat cu costul adaptării mașinii, măsurat, de

exemplu, în minute. Un plan de producție optim constă deci într-un drum hamiltonian de lungime minimă în graful obținut astfel.

Iată încă o problemă (cu nume interesant) referitoare la calul de șah: problema calului lui Atilla. Se spune că acest cal ardea totul în urma lui (atunci când era călărit de Atilla, bineînțeles). Pe o tablă de șah se așază un cal — al lui Atilla — și un rege de culoare opusă. O parte dintre pătratele tablei se presupun „arse” deja. Problema cere să se mute calul numai prin pătrate nearse până la rege și înapoi în căsuța de plecare. Problema este din nou ușor de redus la o chestiune de drumuri în grafuri, „arderea” unor pătrate ducând la un graf parțial, subgraf al grafului reprezentat de întreaga tablă, așa cum l-am considerat în problema acoperirii tablei.

Există tipuri particulare de grafuri de mare interes în aplicații. Un asemenea tip este clasa grafurilor conexe (oricare două noduri pot fi unite printr-un drum) și fără cicluri (un ciclu este un drum închis care se întoarce în nodul de plecare). Un asemenea graf se mai numește și *arbore*. O structură de organizare ierarhică (figura 25.11) se poate reprezenta ca un arbore.

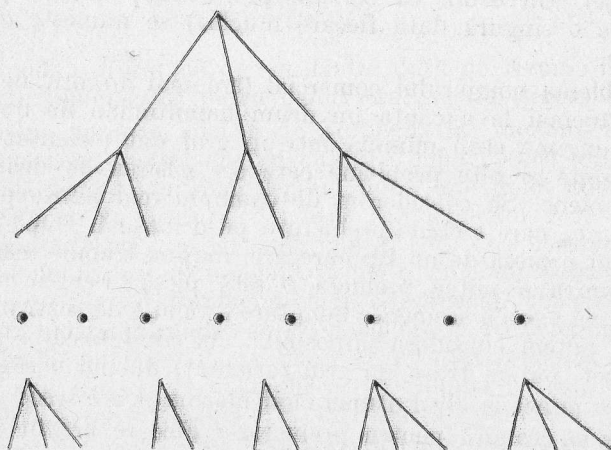


Fig. 25.11

În principiu, un graf este identificat prin *mulțimea* nodurilor sale și prin *mulțimea* muchiilor (sau arcelor, în cazul orientat). Am subliniat cuvântul *mulțime* pentru a întări observația că ordinea, dispunerea în plan a punctelor, forma și lungimea muchiilor nu au nici o importanță atunci când desenăm un graf. (Este vorba aici de lungimea din desen, nu de cea a șoselei reale pe care un graf poate să o reprezinte.) În cazul anterior, cel al structurilor ierarhice, am desenat însă arborile într-o anumită formă, cu un nod precizat în virf (nod numit rădăcină), cu descendenții unui nod aliniați și plasați pe un nivel inferior etc.

Arborii sînt mult folosiți și în teoria limbajelor formale pentru a descrie derivările în gramaticile independente de context (așa cum în secțiunea 12, un arbore descria structura gramaticală a unei propoziții în limba română). Pe un asemenea arbore de derivare se exemplifică în mod curent raționamente altfel greu de înțeles dacă sînt prezentate numai în simboluri. De exemplu, cu ajutorul arborilor de derivare se poate defini și studia ambiguitatea unei gramatici: dacă o frază poate fi generată în două moduri esențial diferite (avînd arborii asociați diferiți), atunci gramatica respectivă este ambiguă.

Pe drept cuvînt, cititorul poate fi nemulțumit de discuția anterioară, deoarece ea mai mult dă seama de utilitatea arborilor și grafurilor de alte forme decît să spună cu ce se ocupă totuși teoria grafurilor, în ce constă de fapt studiul grafurilor, ce capitole compun această teorie. Pentru a răspunde la o asemenea obiecție voi prezenta rubrica 05CXX *Graph Theory* din clasificarea 1979 dată de Societatea Americană de Matematică:

- 05C05 Arbori
- 05C10 Teoria topologică a grafurilor
- 05C15 Teoria cromatică a grafurilor și hărților
- 05C20 Grafuri orientate
- 05C25 Grafuri și grupuri
- 05C30 Enumerare de grafuri și hărți
- 05C35 Probleme extremale

- 05C38 Drumuri și cicluri
- 05C40 Conexiune
- 05C45 Grafuri euleriene și hamiltoniene
- 05C50 Grafuri și matrice
- 05C55 Teoria lui Ramsey generalizată
- 05C60 Conjectura reconstrucției
- 05C65 Hipergrafuri
- 05C99 Alte chestiuni de teoria grafurilor.

Aplicațiile grafurilor fac obiectul altor secțiuni ale clasificării și anume una în *Teoria automatelor*, una în *Matematica discretă* și una în *Circuite și rețele*.

Și pentru a încheia tot ca în secțiunea anterioară, cea referitoare la teoria mulțimilor fuzzy, să consemnăm și aici — parțial — cuprinsul unei cărți de teoria grafurilor, cea a lui Claude Berge, *Teoria grafurilor și aplicațiile ei*, Editura tehnică, București, 1969 (traducere): Studiul preliminar al descendenței, Numere fundamentale ale teoriei grafurilor (număr ciclomatic, număr cromatic, număr de stabilitate internă, număr de stabilitate externă), Nucleul unui graf, Jocuri pe un graf, Problema celui mai scurt drum, Rețele de transport, Centrele unui graf, Diametrul unui graf tare conex, Matrice de incidență, Arbori și arborescențe, Problema lui Euler, Grafuri planare etc.

25.3. ...analiza non-standard?

Conceptele principale ale analizei matematice sînt derivata și integrala. De primul dintre aceste concepte se ocupă calculul diferențial, de cel de-al doilea se ocupă calculul integral.

Atunci cînd a fost creat, la sfîrșitul secolului al XVII-lea, de către Newton și Leibniz, calculul diferențial a fost formulat și fundamentat în termeni destul de imprecisi (deși rezultatele s-au dovedit corecte); astfel, se foloseau în mod esențial termeni ca: infiniți mici, infiniți mari, infinitezimale, obiecte matematice cu un statut foarte nesigur la acea dată.

Iată două exemple. Să considerăm o curbă carecare, graficul unei funcții $f(x)$ (figura 25.12). Derivata acestei



Fig. 25.12

funcții într-un punct egalează valoarea tangentei (trigonometrică) a unghiului format de axa Ox cu tangenta (geometrică) la curbă în punctul $(a, f(a))$. (În continuare vom identifica acest punct cu $f(a)$.) Cum se poate calcula această derivată? Să considerăm două puncte pe curbă, unul corespunzător lui a și unul corespunzător unei valori a lui x mai mare decît a . S-o notăm pe aceasta din urmă cu $a + b$, b fiind un număr pozitiv. Evident, atunci cînd b se micșorează, dreapta care trece prin punctele $f(a)$ și $f(a + b)$ se va apropia din ce în ce mai mult de tangenta la curbă în $f(a)$. Atunci cînd b va deveni *infinît de mic*, această dreaptă se va suprapune chiar cu tangenta.

Unghiul făcut de dreaptă cu axa Ox se va apropia de unghiul făcut de tangentă cu axa Ox ; urmînd să devină egal cu acesta atunci cînd b devine *infinît de mic*. Derivata în a va fi deci obținută la limită ca raportul catetei verticale cu cateta orizontală în triunghiurile formate de dreapta $(f(a), f(a + b))$, paralela prin $f(a)$ la axa Ox și paralela prin $f(a + b)$ la axa Oy . Prin urmare, derivata este chiar egală cu raportul dintre cateta verticală și cea orizontală în triunghiul *infinît de mic* obținut atunci cînd b devine *infinît de mic*. Să notăm cu dx o variație *infinît de mică* a lui x și cu df o variație *infinît de mică* a funcției. Derivata va fi

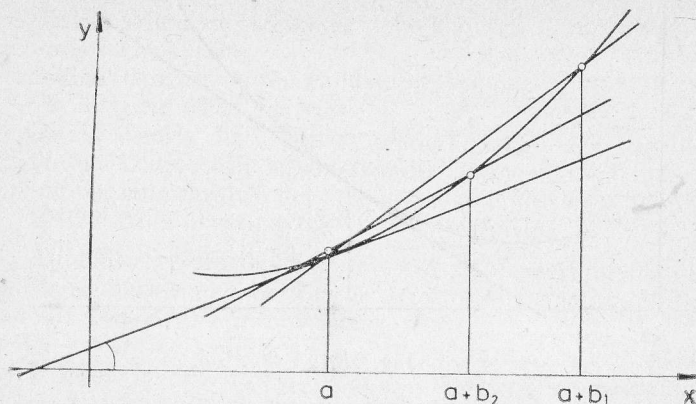


Fig. 25.13

deci df/dx , înțelegînd că aceste variații sînt considerate în punctul a .

Să aplicăm „raționamentul” de mai sus în două situații. Pentru început, să încercăm să deducem pe această cale derivata funcției $\sin x$. Să considerăm o valoare oarecare pentru x (figura 25.14) și să luăm în acest punct un triunghi infinit de mic obținut prin modificarea infinitesimală a lui x .

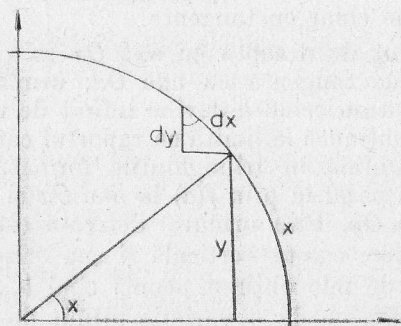


Fig. 25.14

Modificarea lui x se confundă deci cu arcul cu care a crescut x sau chiar cu tangenta în punctul x . Unghiul x se regăsește în triunghiul infinit de mic (ca unghiuri cu laturile perpendiculare). Deoarece dy este chiar variația funcției $\sin x$, ajungem la concluzia că derivata lui $\sin x$ este chiar dy/dx . Dar, în triunghiul infinit de mic, acest raport este chiar cosinusul unghiului x , prin urmare, derivata lui $\sin x$ este tocmai $\cos x$.

Rezultatul este, după cum se știe, corect, deși el a fost obținut printr-un raționament destul de aproximativ. De altfel, raționamente ca cel anterior sînt foarte des folosite de către utilizatorii analizei matematice, de către ingineri mai ales; aceștia asimilează întotdeauna arce sau segmente mici cu o diferențială, interpretează notația dx dy cu un dreptunghi mic etc., iar rezultatele sînt de obicei corecte deși calculul cu aceste infinitesimale este cu totul diferit de calculul algebric obișnuit.

Iată, de pildă, calculul pentru găsirea derivatei funcției $f(x) = x^2$:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} &= \frac{(x + dx)^2 - x^2}{dx} = \frac{x^2 + 2xdx + (dx)^2 - x^2}{dx} = \\ &= \frac{dx(2x + dx)}{dx} = 2x + dx = 2x \end{aligned}$$

Am plecat deci de la un raport în care dx se găsea la numitor, deci era presupus diferit de zero, am împărțit la dx la un moment dat, deci din nou am considerat că dx este diferit de zero, iar în final am scris $2x + dx = 2x$, adică am identificat totuși pe dx cu zero. „În ciuda intuitivității și succesului lui în diferite aplicații, calculul cu infinitesimale este confruntat cu dificultăți serioase” (Andreas Blass, în „Bulletin of the American Mathematical Society”, 84, 1, 1978). Să ne amintim în acest context și de declarația lui Gauss în legătură cu infinitul (mare sau mic): „Protestez împotriva unei cantități infinite ca fiind o cantitate reală; acest lucru nu este permis în matematică. Infinitul este

numai un mod de a vorbi" (Gauss într-o scrisoare către Schumacher în 1831).

Și totuși, până în secolul al XIX-lea analiza matematică a fost formulată în termenii lui Newton și Leibniz, adică folosind infiniții mici și mari, infinitezimalele. În secolul trecut analiza a fost însă reformulată cu ajutorul „limbajului epsilon-delta“, folosit mai întâi de Weierstrass și apoi de toți ceilalți matematicieni.

Iată, de exemplu, cum arată în acest limbaj definiția funcției continue: „O funcție f este continuă într-un punct a dacă oricare ar fi numărul real pozitiv ε , există un număr real pozitiv δ astfel încât pentru orice x care satisface relația $|x - a| < \delta$ avem $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Prin rigoarea sa, limbajul epsilon-delta a înlocuit aproape complet în analiză folosirea infinitezimalelor (deși notațiile dx , df se păstrează încă). Limbajul infiniților mici a căzut astfel în desuetudine, deși este vizibil că el era mult mai intuitiv și mai ușor de manevrat. De exemplu, în acest cadru, o funcție f este continuă în punctul a dacă și numai dacă $f(x)$ aproximează pe $f(a)$ atunci când x aproximează pe a (se spune că x aproximează pe y atunci când numărul $|x - y|$ este o cantitate infinit de mică, o infinitezimală). Această formulare corespunde mult mai bine imaginii pe care ne-o dă o reprezentare grafică, de exemplu, despre continuitate (figura 25.15), decât reușește limbajul epsilon-delta.

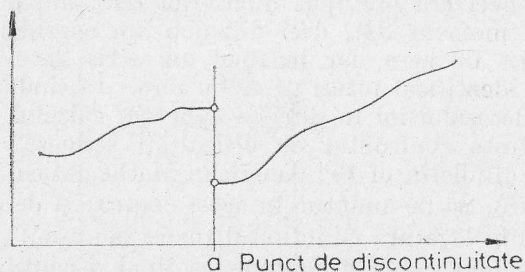


Fig. 25.15

„Multă vreme s-a crezut că, în acest domeniu, rigoarea și intuitivitatea nu pot coexista, fiecare dintre ele impunând compromisuri celeilalte.“ (Solomon Marcus, la pagina 372 a manualului de *Analiză matematică* al Catedrei de Analiză matematică a Facultății de matematică a Universității din București, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1980, unde se face o expunere amplă a elementelor de analiză nonstandard.) Tot din această carte să cităm afirmația făcută de Bertrand Russell la începutul secolului nostru: „...deci infinitezimalele trebuie privite ca inutile, greșite și contradictorii în sine, din punct de vedere al explicării noțiunii de continuitate.“

Una dintre principalele slăbiciuni pe care părea a le avea calculul cu infiniți mici era faptul că operarea cu ei nu se supunea regulilor obișnuite de calcul. Am văzut mai sus în calculul derivatei lui x^2 o asemenea situație. Mai mult, atunci când se înmulțește un număr infinit mic cu un număr oarecare se obține tot un număr infinit mic. Acest lucru este cel puțin straniu, știut fiind că oricare ar fi un număr real pozitiv, a (oricât ar fi el de mic, diferit totuși de zero) și oricare ar fi un alt număr real pozitiv b , există un număr natural n astfel încât $na > b$. Dacă, de pildă, a este un număr de forma $0,000 \dots 001$, unde după virgulă apar n zerouri, iar b este un număr de forma $1000 \dots 00$, unde după 4 apar m zerouri, dacă înmulțim numărul a cu numărul natural 10^{n+m+2} obținem un număr de zece ori mai mare decât b . Se spune că mulțimea numerelor reale este *arhimediană* (iar proprietatea anterioară este numită axioma lui Arhimede). Ei bine, infinitezimalele nu respectă axioma lui Arhimede. Ele sînt deci într-un anumit sens contradictorii cu mulțimea numerelor reale, nu fac parte din această mulțime (deși le folosim în calcule împreună cu numerele reale).

Exact aceasta a fost soluția, calea prin care infinitezimalele au putut fi readuse în matematică și reabilitate: considerarea unei extensii a lui R , mulțimea numerelor reale, în care se regăsesse toate proprietățile numerelor reale mai puțin axioma lui Arhimede. Să notăm această extensie cu R^* . Un număr a din R^* este prin definiție

- un număr infinit mic (infinitesimal), dacă $|a| < r$ pentru orice număr real pozitiv r ,
- un număr finit dacă $|a| < r$ pentru un anumit r din R ,
- un număr finit, dacă $|a| > r$ pentru orice număr real r .

Se pot construi asemenea câmpuri de numere R^* care să difere de R , adică să conțină atât infinitesimale cât și numere infinite și în care să se poată dezvolta o matematică riguroasă, paralelă cu matematica *standard* și care să revină la matematica *standard* pentru acele elemente ale lui R^* care se găsesc în R (sint numere în înțelesul obișnuit al cuvântului)? Răspunsul este afirmativ și a fost dat de către Abraham Robinson în anul 1960.

Iată câteva elemente de calcul cu infinitesimale și infiniti (folosesc în continuare ultimul capitol al manualului de *Analiză matematică* amintit).

Două numere a și b din R^* care diferă printr-un număr infinitesimal se zic numere apropiate și scriem $a \approx b$. (În felul acesta se repară inadvertența pe care o conține notația $f'(x) = df/dx$ folosită de către Leibniz; în cadrul analizei non-standard se scrie $f'(x) \approx df/dx$, relație adevărată în R^* , neidentică cu egalitatea din R , dar reducându-se la aceasta în cazul în care ne referim la numere reale, deoarece singurul număr infinitesimal real este zero.)

Orice număr infinitesimal este finit. Orice număr finit din R^* este apropiat de un număr real unic determinat. Suma, diferența și produsul a două numere finite sint numere finite. Suma și diferența a două infinitesimale sint infinitesimale. Produsul dintre o infinitesimală și un număr finit este o infinitesimală. Suma și diferența dintre o cantitate finită și una infinită sint infinite. Produsul a două cantități infinite este infinit. Inversa unei cantități infinite este o infinitesimală, iar inversa unei infinitesimale nenule este infinită.

Aceste vechi și totuși noi obiecte matematice au deci comportări destul de cumsecade, în ciuda naturii lor neobișnuite.

Am spus că matematica non-standard s-a dezvoltat pe aceleași ramuri cu matematica *standard*. Există astfel teoria mulțimilor non-standard, analiza non-standard, topologia non-standard etc. De fapt, o teoremă fundamentală a matematicii non-standard afirmă că orice enunț care implică numere reale, funcții reale, relații reale, formule logice reale (cu referire la numere din R) este adevărată dacă și numai dacă este adevărat și enunțul care se obține înlocuind elementele anterioare (numere, funcții, relații, formule logice) cu elemente non-standard corespunzătoare din R^* . Cu alte cuvinte, orice rezultat al matematicii *standard* (formatul cu elementele anterioare) este adevărat și în matematica non-standard dacă înlocuim egalitatea cu echivalența $\approx$, extindem funcțiile peste R , la R^* etc. De asemenea, implicația inversă este adevărată.

Din punct de vedere istoric, întemeierea analizei non-standard, în general, a matematicii non-standard, merit ce-i revine, după cum am amintit deja, lui Abraham Robinson (1960: „Non-standard analysis“, *Proceedings of the Royal Academy of Sciences, Amsterdam*) este unanim apreciată ca fiind „o realizare enormă“ (A.H. Lightstone, „*American Mathematical Monthly*“, 79, 3, 1972). De pildă, Kurt Gödel considera introducerea analizei non-standard la fel de importantă ca definirea geometriilor neeuclidiene.

Matematica non-standard este de asemenea utilă pentru predarea matematicii într-o formă mai intuitivă și deci mai atractivă, fără a face însă concesii rigorii. Dar, așa cum limbajul epsilon-delta a înlocuit cu greu limbajul infiniturilor mici, atât în școală cât și în cercetarea matematică, probabil că la fel de greu va înlocui acum limbajul non-standard pe cel clasicizat între timp al lui Weierstrass, deși și elevii și profesorii ar avea de câștigat prin aceasta.

25.4. ...topologia?

Topologia s-a născut în cadrul geometriei de poziție (*analysis situs*, Leibniz în secolul al XVII-lea), dar ea a devenit repede o „teorie“, cu interferențe puternice și cu

alte domenii matematice, dintre care analiza în primul rând. În treacăt fie spus, primul loc în care apare cuvîntul „topologie“ este lucrarea *Worstudien zur Topologie* a lui J.B. Listing, apărută în 1847 în „Göttingen Studien“.

„Într-un sens, topologia este studiul continuității: începînd cu continuitatea spațială, a formelor, ea generalizează și atunci, prin analogie, duce la alte feluri de continuitate —, iar spațiul așa cum îl înțelegem de obicei este lăsat departe în urmă. Bunii specialiști în topologie nu numai că evită orice figură de asemenea fel, dar nici nu se incred în ele. Aceasta se datorează parțial faptului că nu numai că este imposibil de vizualizat pe o figură unele dintre «spațiile» lor, dar este chiar lipsit de sens.” (Stephen Barr, *Experiments in topology*, Thomas Y. Crowell Company, New York, 1964).

Și totuși, într-o oarecare măsură, topologia poate fi înțeleasă și pe figuri, prin exemple. La acest nivel, topologia se interesează de acele proprietăți ale figurilor (prin figură înțelegem o figură geometrică fără restricții asupra numărului de dimensiuni, fie ea pe dreaptă, în plan, în spațiu sau în spații cu mai multe dimensiuni) care se mențin în cazul unor deformări continue (care nu „rup” figurile sau suportul lor) și care nu identifică puncte ale figurii distincte inițial. Mai intuitiv, topologia (elementară) studiază figurile desenate pe suporturi de cauciuc, figurile făcute chiar din cauciuc. Întinzînd, apăsînd, îndoind o foaie de cauciuc există proprietăți ale figurilor care nu se schimbă, oricît de intense ar fi asemenea deformări.

Iată cîteva exemple. Un cerc desenat pe o foaie de cauciuc continuă să rămînă o curbă simplă închisă indiferent de felul cum se deformează suportul. La fel, o curbă deschisă rămîne deschisă, o linie în forma literei B (sau a cifrei 8) rămîne o figură cu două bucle etc. Două figuri care pot fi trecute una în alta prin deformări continue se numesc echivalente topologic, iar proprietățile persistente în asemenea condiții se numesc invarianți topologici. Astfel, un pătrat,

un cerc, o elipsă, un dreptunghi sînt toate figuri echivalente topologic, echivalente cu curba închisă din figura 21.2. Un cerc nu este echivalent nici cu un 8 și nici cu o curbă deschisă. Proprietatea unei curbe închise de a fi simplă (a nu se intersecta cu ea însăși) este un invariant topologic. Trecînd în spațiu, un cub, un tetraedru și o sferă sînt, de asemenea, echivalente.

Mai mult, urmîndu-l din nou pe Stephen Barr (op. cit., pagina 4), în acest fel, „putem lua o bucată — să presupunem, rotundă — de lut și din ea să facem o ceașcă, dar nu putem să-i facem și o coadă din cauza găurii din coadă. Totuși putem face atît ceașca cît și coada ei dintr-o bucată de lut de forma unui covrig (figura 25.16).

Am spus că topologia se intersectează astăzi cu multe domenii matematice. Banda lui Moebius și sticla lui Klein, suporturi pentru diferite „geometrii”, aparțin de fapt topologiei. Teorema lui Jordan, avînd de a face cu o curbă simplă închisă, cu împărțirea planului în regiuni etc. poate fi con-

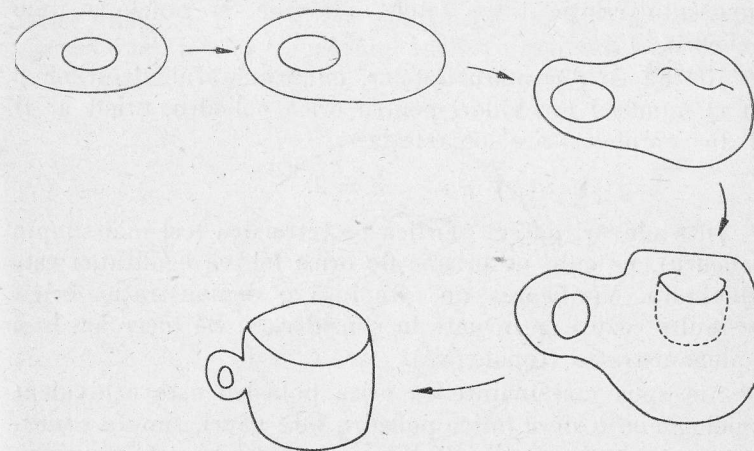


Fig. 25.16

siderată un rezultat topologic (în formă, nu neapărat prin demonstrație). Topologia se întâlnește adesea și cu teoria grafurilor (de fapt începuturile topologiei sînt marcate de problema podurilor din Königsberg și de rezolvarea *topologică* dată de Euler problemei: reținem esențialul, partea invariantă a problemei și raționăm asupra ei). În analiza matematică noțiunea de continuitate este intim legată de structura topologică a domeniilor de definiție și de valori ale funcțiilor.

Mare parte a raționamentelor și a problematicei legate de lucrul cu intervale ale dreptei reale, în matematica școlară (intervale deschise, intervale închise, reuniune și intersecție de intervale etc.) aparțin topologiei.

Nu voi urma prezentarea în mare a ceea ce este topologia, ci voi discuta o relație topologică, probabil prima teoremă a topologiei (deși topologia s-a conturat în forma ei modernă abia cu un secol mai târziu, prin lucrările lui Cayley, 1946, Listing, 1847 și Moebius, 1858) și anume teorema lui Euler, enunțată de acesta în anul 1752. Este vorba de binecunoscuta relație între fețele, vîrfurile și muchiile unui poliedru.

Notînd cu f numărul fețelor, cu v numărul vîrfurilor și cu m numărul muchiilor, pentru orice poliedru, oricît ar fi el de complicat, are loc relația

$$f + v - m = 2.$$

Intr-adevăr, putem verifica pe tetraedru (cel mai simplu poliedru), pe cub, pe prisme de orice fel, că egalitatea este adevărată. Verificarea nu este însă o demonstrație, oricît de multe cazuri ar fi luate în considerare. Să încercăm însă o demonstrație (topologică).

Am spus mai înainte că orice poliedru este echivalent topologic cu o sferă (orice poliedru fără găuri, simplu conex, în termeni mai exacți). Să luăm un tetraedru, de exemplu, și să-l „aplicăm” pe o sferă, ca în figura 25.17.

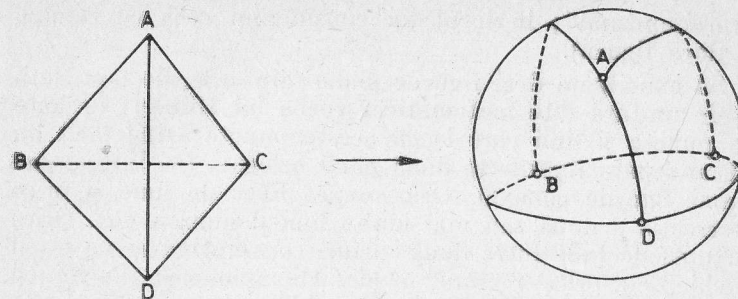


Fig. 25.17

Să presupunem acum că sfera este de cauciuc și să o turtim, de sus în jos, pentru a obține o suprafață ca cea din figura 25.18.

Este clar că dacă formula lui Euler este adevărată pentru tetraedru (și pentru orice alt poliedru), atunci ea este adevărată și pentru figura obținută prin procedeul anterior după turtirea sferei (și reciproc). Evident, pe figura finală vom numi vîrfuri și muchii punctele și liniile corespunzătoare vîrfurilor și muchiilor poliedrului, iar fețe se vor numi „proiecțiile” fețelor poliedrului inclusiv regiunea care înconjoară figura (în exemplul anterior, triunghiul BCD este

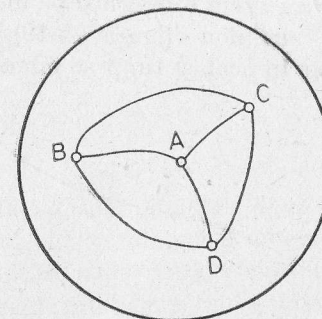


Fig. 25.18

„supraimprimat“; în locul lui considerăm ceea ce rămâne în afara figurii).

Să examinăm deci figurile plane (grafurile, de fapt, iată cit de unitară este matematica, vorba lui Hilbert) formate din puncte și linii care leagă aceste puncte astfel încât nu putem separa figurile în două părți nelegate (ne interesează numai figurile conexe). Orice capăt liber de linie și orice intersecție a două sau mai multe linii îl numim vîrf. Orice porțiune de linie între două vîrfuri consecutive se va numi muchie, iar orice regiune închisă de asemenea muchii (și neîmpărțită mai mult de alte muchii), precum și regiunea care înconjoară figura se va numi față.

Cu această terminologie, demonstrația teoremei lui Euler devine surprinzător de ușoară, deși este făcută într-un caz mult mai general decît cel al poliedrelor (Stephen Barr, op. cit., paginile 13—17). Iată cum decurge o asemenea demonstrație:

1. Cea mai simplă figură care se poate concepe este formată dintr-un singur punct; avem deci un vîrf, nici o muchie și o față (întreg planul). Formula lui Euler este verificată.

2. Cum se poate obține o figură mai complicată plecînd de la o figură existentă? Există exact două posibilități: introducerea unui vîrf nou (pe o muchie deja existentă) sau introducerea unei muchii noi.

Să presupunem că avem o figură și pe una dintre muchiile ei introducem un vîrf nou (figura 25.19). Este clar că se adaugă un vîrf, dar în același timp se adaugă și o nouă mu-

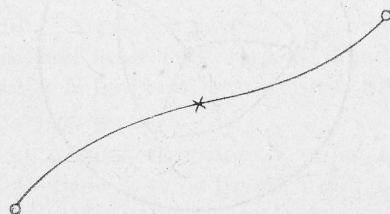


Fig. 25.19

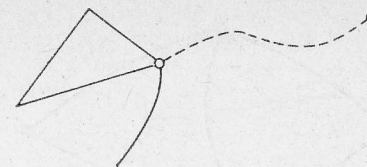


Fig. 25.20

chie (muchia inițială este înlocuită de două muchii); numărul fețelor rămîne neschimbat. În concluzie, expresia $f + v - m$ se transformă în $f + (v + 1) - (m + 1)$, deci continuă să aibă aceeași valoare.

Să examinăm și cazurile de introducere a unei noi muchii.

2.1. Muchia are un vîrf liber și unul într-un vîrf existent (figura 25.20). În felul acesta se adaugă un nod, dar și muchie; acestea se reduc reciproc în formula $f + v - m$.

2.2. Muchia are un vîrf liber și unul pe o muchie existentă (figura 25.21). În acest caz se adaugă două vîrfuri noi care în formulă se reduc cu cele două muchii noi (o muchie veche este împărțită în două).

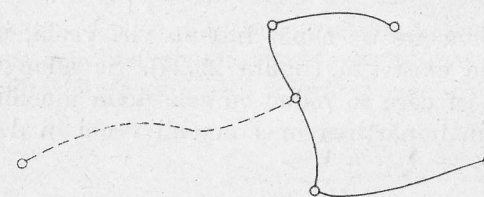


Fig. 25.21

2.3. Muchia se adaugă între două vîrfuri vechi (figura 25.22). În acest caz se adaugă o muchie care se reduce cu fața nou obținută (cele două vîrfuri erau deja unite, deci muchia adăugată produce o nouă față). Valoarea formulei rămîne aceeași.

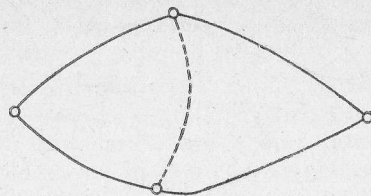


Fig. 25.22

2.4. Muchia are ambele vîrfuri într-un vîrf existent (figura 25.23). Se adaugă astfel o muchie și o față care se reduce reciproc.

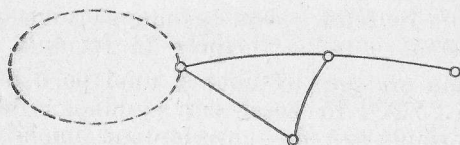


Fig. 25.23

2.5. Muchia are un capăt într-un vîrf vechi, iar celălalt pe o muchie existentă (figura 25.24). Se adaugă astfel o față și un vîrf care se reduce cu cele două muchii noi (una obținută prin împărțirea unei muchii vechi în două părți).

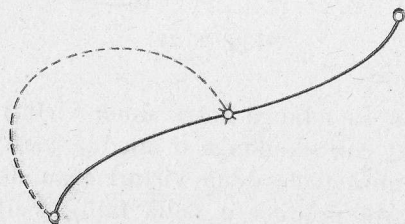


Fig. 25.24

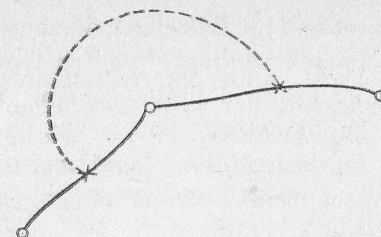


Fig. 25.25

2.6. Muchia are ambele capete pe două muchii vechi (figura 25.25). Se adaugă atunci o față și două vîrfuri care se reduc cu cele trei muchii noi (două obținute prin împărțirea celor două muchii vechi pe care se găsesc vîrfurile noi muchii).

2.7. Muchia are ambele capete în același vîrf situat pe o muchie existentă (figura 25.26). În acest caz se adaugă o față și un vîrf, precum și două muchii cu care se reduce în formulă.

Alte posibilități nu mai există. În toate situațiile anterioare expresia $f + v - m$ și-a păstrat valoarea inițială. Cum pentru cea mai simplă figură, punctul, valoarea ei a fost 2, rezultă că pentru orice figură ca cele discutate avem

$$f + v - m = 2$$

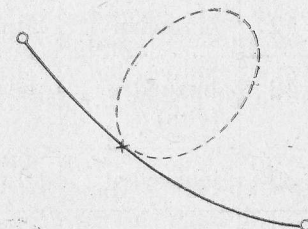


Fig. 25.26

Cu aceasta teorema lui Euler este demonstrată. Iată că se pot face raționamente riguroase (pentru teoreme netriviabile) și pe figuri (și cu ajutorul limbii române, fără nici un fel de symbolism suplimentar). Sau, cum spunea Publilius Syrus (după N. Oprișiu, *Mai în glumă, mai în serios*, Editura Dacia, Cluj-Napoca, 1981, pagina 177): „Ochii nu greșesc dacă mintea conduce ochii“.

Interesant este faptul că teorema lui Euler are aplicații în cele mai variate situații. Ea a fost de pildă utilizată în încercările de a rezolva problema celor patru culori și poate fi folosită cu succes pentru a demonstra teorema celor cinci culori. De asemenea, cu ajutorul relației discutate se poate răspunde la întrebarea: câte poliedre regulate există? (Un poliedru este un corp solid mărginit de fețe plane, iar un poliedru este regulat atunci când toate fețele sale sînt poligoane regulate egale.) Răspunsul (cunoscut de altfel din Antichitate) poate fi obținut pe această cale destul de ușor: există numai cinci poliedre regulate, cele cinci corpuri ale lui Platon (a se vedea tabelul de mai jos).

nr. crt.	f	v	m	nume	formă fețe
1	4	4	6	tetraedru	triunghi echilateral
2	8	6	12	octaedru	triunghi echilateral
3	6	8	12	hexaedru (cub)	pătrat
4	20	12	30	icosaedru	triunghi echilateral
5	12	20	30	dodecaedru	pentagon regulat

De remarcat că grecii credeau în legătura intimă dintre primele patru poliedre regulate din lista anterioară și cele patru elemente constitutive ale lumii. Astfel, tetraedrul era pus în corespondență cu focul, octaedrul cu aerul, cubul era simbolul pămîntului, iar icosaedrul al apei. Așa cum ne informează Liciniu-Ioan Ciplea în revista „Știință și tehnică“ nr. 6, 1981, „descoperirea ulterioară a dodecaedrului pentagonal a forțat oarecum aducerea sa în legătură cu «eterul supralunar»“.

26. MATEMATICA-ECUSON ȘI CAPCANELE EI

Matematica a exercitat întotdeauna o anume fascinație, atît privită dinăuntru, cît și din afara ei. Arabescurile înlănțuite de raționamente reci, implacabile, ducînd la rezultate care păreau a descifra însăși gramatica lumii, au sugerat adesea declarații (precum cea a lui Galilei) care au rămas în memoria oamenilor alimentînd o asemenea fascinație. Figura însăși a matematicianului, cufundat într-o lume curioasă în care simboluri ciudate au înțelesuri care se refuză nematematicianului, figura celui om care stăpînește magia acelor semne și este în stare să spună, folosindu-le, că în cutare loc de pe cer există o stea, o planetă, deși pînă atunci nimeni nu a văzut acea planetă (a se vedea modul în care a fost descoperită planeta Neptun), figura matematicianului zic a fost întotdeauna privită cu admirație și invidie secretă (deși simultan compătimită pentru „robia“ neumanistă la care cu voluptate se supunea). Iar despre aplicabilitatea, eficiența și utilitatea matematicii vorbesc argumente dintre cele mai diferite, de la astronomie la cercetările operaționale, de la fizica teoretică la modelele folosite în meteorologie și seismologie.

Reversul medaliei, căci există și un revers al entuziasmului și încrederii în matematică, ne aduce însă adesea în față exagerări matematizarde, utilizări forțate, incorecte, neadecvate ale symbolismului matematic (de cele mai multe ori) sau chiar ale unor fapte matematice respectabile în

sine sau în alte contexte și scopuri. Așa cum aforistic spune Solomon Marcus, „matematica poate fi folosită: 1) din snobism, 2) deoarece (la fel ca unele medicamente) nu face nici un rău, 3) deoarece este utilă și 4) deoarece nu poate fi evitată folosirea ei“ („Why mathematics in social science?“, în volumul *Social science — for what?*, Editori H-H. Holm și E. Rudeng, Universitetsforlaget, Oslo, 1980). Primele două moduri de folosire a matematicii pot însă avea implicații dintre cele mai neplăcute. Precizarea unor simboluri (indexate...), puse între acolade (acoladele vin din teoria mulțimilor doar...) sau numai între paranteze, a devenit un fel de ecuson, de permis de intrare în clubul-oamenilor-care-folosesc-matematica-deci-sint-oameni-de-știință. De cele mai multe ori, dacă nu întotdeauna, o asemenea utilizare a matematicii, un asemenea „model“, ne lasă însă exact în același punct din care am plecat, el nu este altceva decât o rescriere a unor premise și propoziții verbale într-un limbaj echivalent, mai precis în formă, dar identic în conținut și cu care nu se poate obține nimic nou, nici o concluzie netrivială.

Asemenea „aplicații“ ale matematicii sunt nenumărate mult mai numeroase decât aplicațiile corecte și relevante, astfel încât, în fața unei veritabile inflații de articole de logică, filozofie, psihologie, lingvistică etc., în care apar „obiecte de cult“ matematic, vom ajunge probabil să ne întrebăm dezorientați ce este la urma urmei modelarea matematică. Abundența „modelelor“ de tipul: fericirea (f) este o funcție (F) de realizarea profesională (p), realizarea familială (c), starea de sănătate (s) și mai știu eu ce alte argumente, poate să conducă la răspunsuri neașteptate la această întrebare (cu urmări nedorite și nemeritate în planul statutului științific și social al matematicii).

Exemplul anterior este puțin forțat, însă altele cu totul asemănătoare pot fi găsite în multe locuri. La fel pot fi găsite formule, indicatori, ecuații, dacă nu pur și simplu greșite, cel mai adesea complet lipsite de relevanță.

Nu voi face aici o listă de asemenea „probe“. Ar fi o încheiere cu totul nepotrivită pentru o carte care se vrea totuși optimistă aproape până la exagerare în ceea ce pri-

vește posibilitățile matematicii. În plus, nici nu merită făcut un efort prea mare pentru consemnarea rateurilor matematizarde, multe dintre ele fiind complet lipsite de haz.

Există însă și situații nostime în această zonă. Un asemenea exemplu, mai grav chiar și veți vedea de ce, poate fi întâlnit în articolul „Logica alegerii și decizia socială“ (apărut în „Probleme de logică“, volumul VIII, Editura Academiei R.S. România, București, 1981, sub egida Institutului de filozofie al Academiei). Gravitatea la care mă refeream provine din faptul că articolul are ca scop criticarea (vehementă) a logicianului japonez Yasusuki Murakami, cel care în anul 1968 a publicat o carte cu titlul *Logic and social choice* în care construiește un model logic „pentru analiza procedurilor de vot“, model cărui îi dă „o interpretare politică inacceptabilă“, „favorizată de anumite imperfecțiuni formale ale sistemului (*Logica alegerii...*, pagina 218). Demonstrarea inconsistenței modelului lui Murakami (demonstrație publicată și într-o altă revistă, cu patru ani mai înainte) se bazează pe un calcul logic corect, care se termină însă cu următoarea perlă (op. cit., pagina 230): „Considerind acum împreună formulele (...), *transitivitatea echivalenței* impune drept consecință necesară a celor de până acum formula

$$\bar{p}(x, y) \equiv (p(y, x) \vee \bar{p}(x, y))$$

care este însă o formulă nevalidă. Dacă vom scrie A în loc de $\bar{p}(x, y)$ și B în loc de $p(y, x)$, formula ar putea fi redată și drept $A \equiv (B \vee A)$, care este o expresie evident nevalidă“. (Reamintesc că $\neg$, $\equiv$ și $\vee$ sint, respectiv, simbolurile ce notează negația, echivalența și disjuncția logică.)

Cu același procedeu, dacă în inegalitatea $1 < 1 + 1$ înlocuim primul termen cu A și pe al doilea cu B , atunci din faptul că relația $A < B$ nu este totdeauna adevărată, rezultă că nici $1 < 1 + 1$ nu este totdeauna adevărată! Este exact ceea ce se face mai sus: uitând cine sint A și B se trage o concluzie pe o formulă și se extrapolează pe alta.

Să precizăm însă că $p(x, y)$ este o notație pentru propoziția „ x este preferat lui y ” și că dintre $p(x, y)$ și $p(y, x)$ cel mult una dintre propoziții este adevărată (ordinea dintre x și y ne poate fi indiferentă și atunci nici $p(x, y)$ și nici $p(y, x)$ nu este adevărată). Cu alte cuvinte, dacă avem $p(x, y)$, atunci nu avem și $p(y, x)$ și invers, $p(y, x)$ implică $\bar{p}(x, y)$. Să verificăm cu ajutorul tabelelor de adevăr formula în discuție (reamintind că $p \equiv q$ este adevărată dacă și numai dacă p și q sînt concomitent false sau adevărate).

$p(x, y)$	$p(y, x)$	$\bar{p}(x, y)$	$p(y, x) \vee \bar{p}(x, y)$	$\bar{p}(x, y) \equiv (p(y, x) \vee \bar{p}(x, y))$
0	0 sau 1	1	1	1
1	0	0	0	1

Formula este validă. Critica făcută lui Murakami este nefondată.

În exemplul anterior, nu numai eroarea în sine este de remarcat, ci și contextul în care ea apare (context pigmentat și cu alte stîngăcii matematice). Într-adevăr, mi se pare semnificativ faptul că este vorba de articolul unui nematematician dintre mulții care cochetează cu matematica și care — mai rău — critică un logician chiar cu referire la consistența formală a sistemului logic dat de acesta.

Altfel, despre erori în matematică s-ar putea vorbi foarte mult. Sînt însă erori și erori! (Se pare că majoritatea marilor matematicieni ai lumii au comis erori; George Șt. Andonie, *Varia mathematica*, p. 157.) Există chiar cărți dedicate erorilor matematicienilor; vezi Al. Froda, *Eroare și paradoxe în matematică*, Editura enciclopedică română, București, 1971.

27. CALCULATOARE SAU CREIERE ELECTRONICE?

În ultima vreme se vorbește mai rar despre „creiere electronice” atunci cînd este vorba despre calculatoare, însă în anii '50 și '60 erau frecvente întrebările de genul: gîndește calculatorul? înțelege el ceea ce face? va gîndi și va înțelege vreodată? va veni o vreme în care calculatoarele vor ajunge atât de perfecționate încît să-l întrecă pe om, să-l domine și eventual chiar să-l subjuge? Asemănarea cu creierul uman dădea plauzibilitate nu numai unor asemenea întrebări, dar chiar și alternativei că răspunsul va fi în mare măsură afirmativ. Într-adevăr, și creierul și calculatorul calculează, prelucrează informații, cu calculatorul s-au putut demonstra teoreme de matematică (este adevărat, pe unele oamenii le știau deja, dar altele nu au putut fi obținute altfel), viteza de calcul și capacitatea de „memorare” a calculatorului creșteau continuu astfel încît programele care jucau șah, nim, șeptică sau alte jocuri erau din ce în ce mai puternice.

În ultima vreme, performanțele calculatoarelor au depășit cu mult limitele de îngrijorare prevăzute în anii '50. Și totuși îngrijorarea a scăzut...

Astăzi calculatorul știe și poate să vorbească și să înțeleagă comenzi verbale; în demonstrația teoremei celor patru culori el are o participare care nu a fost încă preluată de om și nici nu este sigur că va putea fi recuperată vreodată. Citim în ziare că în viitorul apropiat medicamentele vor putea fi testate pe calculator, „meseria” de cobai nu va mai avea căutare. Despre calculatoare-psihiatri, care stau de vorbă cu pacientul și-l ajută pe acesta să se regăsească, să se defuleze, care pun chiar diagnostice în urma unei asemenea discuții, s-a vorbit deja cu cîțiva ani în urmă. Acum se vorbește și despre calculatoare-pacient, care se poartă ca un om nervos, ca un complexat, ca un schizofrenic.

Cu cîțiva ani înainte de a muri, Alan Turing își imagina următorul test pentru a diagnostica dacă un calculator a ajuns sau nu la un nivel de inteligență comparabil cu al omului: Un om și un calculator sînt plasați în două camere separate și puși să discute prin intermediul unei mașini de

seris. Dacă după discuție omul nu-și dă seama că a vorbit cu o mașină, atunci acea mașină este inteligentă. Astăzi criteriul lui Turing este depășit de departe. O reală capacitate de a realiza silogisme verbale, abilitatea de a pune întrebări atunci când nu știe să răspundă (întrebări pentru a cere detalii sau pentru a deturna pur și simplu discuția), un anumit umor al conversației, fac din calculator un partener foarte agreabil de discuție. De pildă, cineva îmi povestea că a văzut la o universitate din S.U.A. un terminal al unui calculator pe care studenții puteau face anumite aplicații. Dacă un student greșea atunci când calculatorul cerea informații, atunci el era rugat să introducă din nou acele informații și cu mai multă atenție. La început rugămintea era politicoasă, la repetarea greșelii formularea devenea mai aspră, la a treia eroare consecutivă calculatorul emitea supoziția-acuzație „Nu cumva nu știți englezește?“, la a patra recidivă se făceau presupuneri cu privire la seriozitatea studentului, iar la următoarea, capul de imprimare al mașinii de scris (de tip I.B.M.) se ridica în sus, începea să se lege și simultan mașina începea să fluiera refuzând să mai converseze cu studentul care o necăjise.

Exemplul anterior se referea la o glumă. Două exemple „serioase“ de conversații cu calculatorul sunt prezentate de Edmond Nicolau în *Întrebări care își caută răspunsul*, Editura politică, București, 1970, în capitolul intitulat chiar... „Mașina poate întrece omul?“ (În treacăt fie spus, răspunsul dat de Edmond Nicolau este categoric *da* în planul performanțelor și categoric *nu* în planul competențelor.)

Iată o conversație realizată cu ceva mai puțin timp în urmă de către un grup de cercetători de la un laborator de inteligență artificială din Marsilia, Franța (A. Colmerauer, „Metamorphosis grammars“, în volumul *Natural language conversation with computers*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1978, nr. 63, în seria *Lecture notes in computer science*):

Programatorul: — Să discutăm! Dumnezeu este prieten cu toată lumea.

Calculatorul: — Este aici o problemă privind sexul.

- P. — De detalii! Eu sint Horace.
 C. — Am înregistrat... Sinteți de sex masculin?
 P. — Da.
 C. — Am înregistrat... Horace este un nume de sex masculin?
 P. — Da.
 C. — Înregistrez.
 P. — Nu mai cere detalii!
 C. — Înregistrez. Vă contraziceți. Uit că mi-ați spus „De detalii!“.
 P. — De ce nu sint eu Dumnezeu?
 C. — Deoarece eu știu să raționez. Și pentru că mi-ați spus „Eu sint Horace.“.
 P. — Amicul surorii mele este Curiace.
 C. — Curiace este tot de sex masculin?
 P. — Zozo este fiul meu.
 C. — Da! sau nu!
 P. — Da! Zozo este fiul meu! Cine este prietenul mătușii lui Zozo?
 C. — N-am înțeles această frază.
 P. — Cine este prietenul mătușii lui Zozo?
 C. — Dumnezeu! Curiace!
 P. — De ce este Curiace prietenul mătușii lui Zozo?
 C. — Deoarece eu știu să raționez. Și pentru că mi-ați spus: „Amicul surorii mele este Curiace.“ Și pentru că mi-ați spus: „Zozo este fiul meu.“ Și pentru că mi-ați spus: „Eu sint Horace.“
 P. — Diavolul este prietenul meu. Cine este prietenul lui Dumnezeu?
 C. — Dumnezeu! Toți oamenii! Dumnezeuvoastră! Curiace! Horace!
 P. — Diavolul nu e prietenul nimănui.
 C. — Vă contraziceți. Uit că mi-ați spus: „Diavolul este prietenul meu“. Uit că mi-ați spus „Dumnezeu este prieten cu toată lumea“.
 P. — Cine nu e prietenul meu?
 C. — Diavolul! Diavolul!

P. — Prietenul surorii nepoatei mele nu este prietenul meu.

C. — Asta e prea complicat.

P. — La revedere!

C. — Bună seara!

Trebuie să recunoașteți că este destul de tulburător să vă treziți într-o sală în care nu se află nimeni în afară de dumneavoastră și un calculator, o serie de dulapuri cu becuțe, și că timp de o jumătate de oră trebuie să stați la taclale despre relațiile între Dumnezeu, Diavol, Horace, Zozo, Curiace, frații, surorile, nepoatele, mătușile, amicii și ne-amicii lor, cu un difuzor din care vă răspunde o voce puțin sacadată, metalică, dar plăcută, o voce de femeie (*mașina* fiind de genul feminin). Sînt curios după o asemenea experiență (și nici nu este nevoie să trăiți experiența, ajunge să v-o imaginați) cum răspundeți la întrebarea „sînt calculatoarele inteligente sau nu?”.

Proba anterioară pledează pentru inteligența mașinilor (în sensul lui Turing), însă aceasta se întîmplă totuși în plan subiectiv, mai mult sau mai puțin literar, din afară. O analiză atentă a problemei ne conduce însă la sesizarea naturii algoritmice a modului de comportare verbală a calculatorului; în fond nu vorbim cu calculatorul, ci cu programul pe care acesta îl execută. Și dacă discuția durează mai mult, pînă la urmă ea va ieși din cadrele în care programul se descurcă și așa cum s-a întîmplat în exemplul anterior, sau va renunța să continue, sau va continua în mod aberant, dezvăluindu-și natura mecanică. Toemai de aceea, în ciuda realizărilor spectaculoase (în anul 1977 programele de calculator erau cotate la nivelul de maestru național de șah) astăzi nimeni nu se mai teme de calculator.

Pe de o parte, obișnuiți cu progresele lor, rezultatele calculatoarelor nu ne mai miră, nu ni se mai par neobișnuite. Pe de altă parte, limitele calculatoarelor s-au precizat din ce în ce mai mult, după euforia primelor succese, în majoritatea domeniilor a intervenit o plafonare evidentă în ceea ce privește posibilitățile calculatoarelor (Dan Farcas, *Calculatorul electronic și gîndirea umană*, Editura Albatros,

București, 1978). Pe de altă parte, printr-o simplă întrerupere a curentului electric, un calculator poate fi făcut complet inofensiv (Edmond Nicolau în finalul cărții *Creierul electronic*, Editura științifică și enciclopedică, București, 1979), ceea ce ne dă un sentiment de siguranță aproape confortabil.

Apropo de șah: în anul 1957, Herbert Simon prezicea că „în zece ani un calculator va fi campionul lumii la șah, dacă nu cumva regulamentul îl va îndepărta din competiție”; în anul 1975 Earl Hunt, un alt specialist în inteligența artificială, era însă mult mai pesimist: „programele de azi sînt oponenți triviali pentru jucătorii maeștri“.)

Dar...

Nu sînt deloc un adept al ideii că mașinile în general, „creierele electronice” în particular vor ajunge să ne... subjuge! Este clar că mașinile nu au ceea ce se cheamă conștiință, că ele nu pot acționa în virtutea unor scopuri pe care ele singure și le propun, că barierele algoritmice în care acționează le limitează mult competența intelectuală (vezi teoremele lui Gödel, vezi faptul că inteligența înseamnă în mare măsură creație, iar creația se face „prin accident”, nu algoritmic etc.), că tot ceea ce fac (deocamdată) calculatoarele fac pe baza unor programe și a unor comenzi explicite venite din partea oamenilor.

Dar...

Un „dar...” trebuie să existe totuși în această privință. Calculatoarele ne pot pune totuși nu numai probleme filozofice și literare, ci și probleme mai concrete (cu semnificație filozofică, socială).

Spuneam mai sus că astăzi nimeni nu se mai teme de calculatoare. Cred că se exagerează puțin în această direcție. Sentimentul de siguranță a fost creat în anii '70, atunci cînd euforia și întrebările deceniilor anterioare căzuseră în desuetudine. Tot anii '70 au adus însă în plin plan microprocesoarele, acele așchii de siliciu, de mărimea unei unghii, capabile să înlocuiască un dulap întreg dintr-un calculator de azi, să facă chiar mai multe lucruri decît acesta, mai

repede și cu un consum de energie insignifiant. Impactul microprocesoarelor asupra vieții pămîntenilor deceniilor următoare poate să ne depășească așteptările. Și fără intenție, fără rea voință, aceste calculatoare „moletronice” sau pe aproape (vezi Adrian Rogoz, *Prețul secant al genului*, Editura Albatros, București, 1974) pot să schimbe într-atît obiceiurile de azi, pot să devină atît de răspindite și de indispensabile, încît să devină „dominatoare” (într-un sens nu neapărat negativ).

Dar (încă un „dar”...) pot deveni dominatoare și în sens negativ.

În „Almanahul Știință și Tehnică” 1981 este publicată o povestire SF a cunoscutului scriitor american Robert Sheckley. Ea se intitulează „Pasăre de pază” și acțiunea se derulează cam în felul următor: Pentru a preveni comiterea crimelor și a actelor de violență se construiesc niște păsări electronice care zboară deasupra orașelor observînd tot, semnalînd și împiedicînd aceste evenimente antisociale (antiviata, de fapt). Pentru a fi eficiente, aceste păsări sînt construite în așa fel încît ele să comunice între ele și să preia una de la alta experiența pe care fiecare o acumulează, știută fiind ingeniozitatea răufăcătorilor. Și păsările învață, crimile se răresc, păsările învață mai departe, crimele dispar, păsările continuă să învețe pînă ajung atît de învățate încît: opresc pe vînători să vîneze, opresc pe pescari să pescuiască, opresc pe măcelari să-și facă meseria, interzic ruperea florilor și a fructelor, la fel cosirea ierbii și așa mai departe cît vî ajută imaginația. Ei bine, din apăratori ai integrității oamenilor, păsările de pază ajung prin autoadaptare să interzică orice agresiune asupra unei forme de viață. Oamenii erau condamnați să piară de foame din cauza apărătorilor lor. Noroc cu fabricanții de păsări de pază care reușesc să fabrice un șoim care „ucide” păsări de pază, un șoim foarte eficient, și el cu autoadaptare, deoarece păsările de pază încep să se apere, un șoim care va extermina păsările de pază, dar (și aici povestirea se încheie) ce vor face șoimii după ce vor termina păsările de pază? Ce vor face ei, învățați fiind să ucidă și să se perfecționeze în această direcție?

Să presupunem acum că într-o sală de calculator se instalează un dispozitiv de prevenire a intreruperilor curentului, de prevenire a sabotajelor, un dispozitiv în legătură cu calculatorul și care mai este capabil și de reparații simple (treccrea pe un sistem auxiliar de alimentare, pornirea unui grup generator autonom, blocarea ușilor de acces la sursa de energie etc.). Să presupunem că profesorul Edmond Nicolau, cu binecunoscutu-i simț al umorului, intră acolo și încearcă, plin de bune intenții, să întrerupă alimentarea cu curent electric...

Presupunerea mea ține cumva de literatură, dar nu sînt deloc sigur că nu există deja asemenea sisteme de siguranță a unor calculatoare, mai ales a celor care nu sînt puse numai să rezolve probleme de șah și să scrie versuri...

Iar cazul celui calculator (ce satisfacție să-l numim idiot!...) care a emis o chitanță prin care un cetățean era somat să plătească unei firme zero dolari, zero cenți, este taxat drept o glumă bună. Și totuși, să presupunem, așa cum un alt scriitor a făcut într-o schiță, că acel calculator are și sarcina să emită mandate de arestare către cei care nu-și plătesc datoriile la timp. De ce nu?, doar calculatoarele sînt folosite și în justiție, timid, este adevărat, dar cu perspective dintre cele mai largi (sînt doar atît de obiective, de incoruptibile etc. etc.). Este clar că pînă se făcea lumină, pînă ce ori cetățeanul plătea acea sumă inexistentă sau calculatorul era lămurit că „zero” nu este o datorie ar fi trecut ceva timp, deloc plăcut pentru cetățean...

Exemplele anterioare au o trăsătură comună: în ele este vorba despre automatizarea funcționării unor mașini, a unor calculatoare, despre posibilitatea ca aceste calculatoare să funcționeze nesupravegheate sau chiar să-și modifice funcționarea adaptîndu-se la situații noi fără a cere pentru aceasta ajutorul omului.

Asemenea posibilități autoadaptive sînt însă realități. Automate, teoretice sau mecanice, care „învăță”, trăgînd adică învățăminte din experiențe, au fost concepute și realizate de multă vreme. Există azi programe care scriu programe, programe care se automodifică în limite destul

de largi, una dintre problemele de bază ale inteligenței artificiale este tocmai auto-modificarea, adaptabilitatea automatelor. Nu mi se pare deloc o utopie realizarea de calculatoare care nu numai să fabrice calculatoare, ci să le și programeze. O eroare în calculatorul-mamă poate să se transmită neobservată la urmași, cu urmări dintre cele mai neprevăzute. Să ne amintim ce spunea Aaron Sloman în *The computer revolution in philosophy: Philosophy, science and models of mind* (Harvester Studies in Cognitive Science Humanities Press, 1978): „Programele complexe uneori lucrează și aceasta se întâmplă din rațiuni pe care cei care le-au realizat le înțeleg numai pe jumătate, dar cel mai adesea aceste programe eșuează în moduri pe care cei care le-au realizat nu le înțeleg. Rezultă că nimeni nu este în stare să facă afirmații asupra limitelor a ceea ce poate fi făcut cu un program de calculator, în special cu programele care interacționează cu medii complexe, așa cum fac oamenii.

Încercarea de a face afirmații este cam la fel de neghioabă precum aceea de a încerca folosirea procesului tipografic pentru a preciza felul teoriilor care vor fi expuse în manualele de fizică peste o sută de ani.”

(Referindu-se la tonul afirmațiilor lui A. Sloman, Douglas R. Hofstadter, spune într-o recenzie în „Buletinul Societății Americane de Matematică”: „Probabil că în Marea Britanie este obiceiul să fii atît de agresiv intelectual, dar personal eu găsesc că...”)

Să mai consemnăm încă o declarație în favoarea capacității de a învăța a mașinilor. În *Aurul Cenușiu*, volumul III, pagina 9, profesorul Mircea Malița* spune: „Multe superiorități ale gândirii noastre s-au lichidat. De pildă, capacitatea de a face opțiuni. Calculatoarele de astăzi lucrează cu foarte multe alternative și, în funcție de ipoteze, o iau pe una sau alta din direcțiile posibile. Cuvîntul «dacă» se află la întretăierea de drumuri. Calculatorul îl are deci pe «dacă». Neprevăzutul? Astăzi mașina poate face experiențe și e aptă să-și aleagă programul ulterior în funcție de rezultatele lor. Iată că mașina învață.”

Mașinile pot deci învăța și vor continua să învețe; iar învățînd neconținut, deci imprevizibil, ele ne pot face ne- cazuri. Necazuri evident diferite de cele ce se ascundeau acum douăzeci de ani în spatele sintagmei „creierul electronic”, dar reale și nu nestîinjenitoare.

Dar în același timp ele ne vor ajuta în multe direcții, probabil mult mai mult decît ne putem imagina acum. Precum problema celor patru culori mai sînt și alte probleme în matematică. Și așa cum „logaritmi au dublat viața astronomilor” (Kepler), reducînd înmulțirile la adunări, la fel calculatoarele sînt de așteptat că vor dubla viața contabililor, inginerilor, economiștilor, matematicienilor, proiectanților și a multor altor oameni. Mai mult, așa cum cibernetica se preocupă cu „perfecționarea automatelor după modelul sistemului nervos al ființelor vii”, la fel „anticibernetica” va avea un important cuvînt de spus în „perfecționarea omului și a altor ființe vii, în special a creierului ca organ de gîndire, control și conducere, pe baza datelor furnizate de mașinile electronice” (Octav Onicescu, *Omul și automatele*). Iar despre utilitatea pentru filozofi și psihologi a inteligenței artificiale nu mai este nevoie să vorbim după declarațiile tranșante ale lui Aaron Sloman, menite, după observația ironică a lui D.R. Hofstadter, să provoace o revoluție a calculatoarelor în filozofie.

Am impresia că o asemenea revoluție chiar există, ea nu mai trebuie provocată.

28. MATEMATICIENII ȘI NEMATEMATICIENII DESPRE MATEMATICĂ

Am vorbit despre fascinația pe care a exercitat-o totdeauna matematica, mai ales asupra nematematicienilor. Și, cum era și firesc, această fascinație a fost exprimată într-o sumedenie de reflecții, unele rămase celebre prin conținutul lor, prin împrejurarea în care au fost rostite sau pur și simplu prin autoritatea autorului. De asemenea, există multe reflecții memorabile ale matematicienilor înșiși refe-

ritoare la domeniul lor de cercetare, de lucru, de viață chiar. Motivele pentru care aceste reflecții au intrat adesea în dicționarele de aforisme sînt multiple: au existat matematicieni scriitori, care au știut deci să dea formă interesantă unor idei interesante; în general, matematicienilor le-a fost caracteristică exprimarea aforistică, clară, compactă, redusă la minimul necesar, la fel ca într-o lucrare de profil. În plus, adesea matematica s-a întîlnit cu filozofia, cu problemele fundamentale ale existenței și cunoașterii umane, astfel încît afirmațiile matematicienilor au fost de multe ori încărcate de semnificații profunde, de mare audiență.

Ceea ce urmează nu este un dicționar de citate, mai mult sau mai puțin cunoscute, mai mult sau mai puțin expresive, relative la matematică (deși un asemenea dicționar mi se pare de mare interes). Voi consemna doar cîteva zeci de propoziții ale matematicienilor și nematematicienilor despre matematică, în general altele decît cele cu care cititorul s-a întîlnit deja în text. Voi preciza de fiecare dată originea citatului (cea pe care o presupun eu), cu rezerva că, așa cum se întîmplă cu majoritatea aforismelor, de regulă cineva le-a pronunțat pentru prima dată și altcineva le-a făcut cunoscute (situație similară celei cu numele teoremelor din matematică: se pare că teorema lui Pitagora nu este a lui Pitagora, regulile lui L'Hospital nu sînt ale lui L'Hospital etc.).

În legătură cu originea aforismelor matematice, merită a fi consemnată următoarea anecdotă pe care J.E. Littlewood o povestește la pagina 52 a cărții *Varietăți matematice* (Editura enciclopedică română, București, 1969): „În șpalturile lucrării lui Hardy despre Ramanujan am citit: «cineva a spus că fiecare număr întreg pozitiv este unul dintre prietenii săi personali». Reacția mea a fost: «Interesant, cine a spus acest lucru? Aș fi vrut să fiu eu acela». Cînd cartea era în pagini am citit (așa cum a și rămas tipărit): «Littlewood a spus...».”

Și de atunci toată lumea știe și citează că Littlewood a spus că fiecare număr...

Ordinea citatelor care urmează este absolut întîmplătoare. Sper că cititorul nu se va supăra pentru asta.

G. Cantor: Esența matematicii este libertatea sa.

D. Hilbert: Nimeni nu ne poate da afară din paradisul pe care Cantor l-a creat pentru noi.

Ch. Hermite: Abel dă de lucru generațiilor viitoare pe nu mai puțin de cinci sute de ani.

Paul Valéry: Matematica — cea mai frumoasă dintre științe.

R.W. Hamming: Știința nu explică „de ce” lucrurile sînt așa cum sînt — gravitația nu explică de ce cad corpurile — știința dă atît de multe detalii despre „cum”, că avem sentimentul că înțelegem „de ce”.

Pitagora: Matematica este calea de înțelegere a Universului. Numărul este măsura tuturor lucrurilor.

Gr. C. Moisil: ... decurg de aici două rînduri de sarcini; ale literaților să învețe matematică și ale matematicienilor să-i învețe matematică pe literați.

M. Malița: Calculul probabilităților restabilește încrederea în voința și decizia umană, luminîndu-i alternativele.

Le Corbusier: Geometria este limbajul omului. De la nașterea sa, omul nu a acționat decît pe fundamentul geometriei, pe care a pătruns-o cu atîta claritate încît putem admite că ea este aceea care ne condiționează.

J.E. Littlewood: Mereu întîlnesc oameni care se-ndoiesc fără motive suficiente de posibilitățile lor potențiale. Prima verificare este dacă s-au ales cu ceva din geometrie. Faptul că nu le-a plăcut sau n-au progresat în alte discipline matematice n-are importanță.

A.S. Besicovich (după J.E. Littlewood): Reputația unui matematician se bazează pe numărul de demonstrații nereușite pe care le-a făcut.

Euclid: În matematică nu există un drum special pentru regi.

Ch. Sturm: Și acum, domnilor, am ajuns la teorema al cărei nume am onoarea să-l port.

K. Weierstrass: Un matematician care nu are ceva de poet nu va fi niciodată un perfect matematician.

Gh. Țițeica: Studiul științific al fenomenelor naturii caută să ia forma matematică și acest studiu se socotește deplin când forma matematică a fost găsită.

Născută în același timp cu arta grecească, matematica a păstrat în țesătura ei, în structura ei intimă, o oarecare afinitate cu arta.

N.I. Lobacevski: Nu există nici un domeniu al matematicii, oricât de abstract ar fi el, care să nu se dovedească cîndva aplicabil la fenomenele lumii reale.

Gh. Vrănceanu: Geometria face să se vadă nevăzutul.

O. Onicescu: Matematica — știința credincioasă a marilor revoluții, știința care nu trădează, ci numai ajută...

J.J. Sylvester (despre Cebîșev): Învîgătorul numerelor prime, cel care a forțat torentul lor capricios să intre în limitele algebrei.

B. Pascal: Obiectul matematicii este atât de serios, încît este util să nu pierdem ocazia pentru a-l face puțin mai distractiv.

C.F. Gauss: Studiul lucrărilor lui Euler constituie cea mai bună școală pentru cele mai variate domenii ale matematicii.

F. Arago: Euler calculează așa cum oamenii respiră și vulturii planează în văzduh.

S. Germain: Algebra nu este decît o geometrie scrisă, iar geometria nu este decît o algebră figurată.

D. Hilbert (!): Semnele aritmetice sînt figuri scrise, iar figurile geometrice sînt formule desenate.

S.D. Poisson: Viața este bună pentru două lucruri: a studia matematica și a o profesa.

Gh. Țițeica: Există printre matematicieni o convingere intimă și puternică care-i susține în cercetările lor abstracte și anume că nici una dintre problemele lor nu poate rămîne fără răspuns.

Ion Barbu: Ca și în geometrie, înțeleg prin poezie o anumită simbolistică pentru reprezentarea formelor posibile de existență. Există undeva în domeniul înalt al geometriei un loc luminos unde se întîlnește cu poezia.

E. Cartan: Nu există nici o ramură a matematicilor moderne care să nu poarte amprenta lui Poincaré.

L. Kronecker: Toate rezultatele matematice ale celor mai profunde cercetări trebuie să se poată exprima în final sub forma simplă de proprietăți ale numerelor întregi.

J.J. Sylvester: Nu există pe lume un studiu care să pună mai armonios în acțiune facultățile spiritului decît cel al matematicilor. Matematicianul trăiește mult timp și rămîne totuși tînăr; aripile sale nu se frîng de timpuriu, iar porii săi nu-s obturați de praful care se ridică pe marile drumuri prăfuite ale vieții obișnuite.

H. Poincaré: Trebuie deci ca hazardul să fie altceva decît numele pe care-l dăm ignoranței noastre.

Voltaire (despre Newton): Calculul infinitezimal și gravitația nu i-ar fi servit nimic fără o nepoată draguță.

Compasul lui Newton măsurînd Universul

Ridică vîlul cel mare și cerurile sînt deschise.

O. Onicescu: Silindu-te, tu cititorule, să înțelegi pe Arhimede, Galilei, Descartes sau Newton și nu vrînd să-i faci pe ei să te înțeleagă pe tine, cum ar dori unii amatori de istorie, te încadrezi în istorie și capeți satisfacție.

W. Blaschke: Sîrguința nu ne ajunge, din păcate, ne trebuie ceva mai mult: o idee.

D. Hilbert: Teoria demonstrației înseamnă un acompaniament formal la procesele gîndirii demonstratoare.

Ion Barbu: Gauss a realizat printre matematicieni un ordin nou, oarecum transfinit, de mărime. E net superior unei opere ea însăși supremă.

Nu orice subiect matematic se lasă vulgarizat.

Operele matematice robesc și încîntă, întocmai ca operele pasiunii și inteligenței.

Nu există matematică vorbită.

A vedea în matematică o simplă colecție de probleme ierarhizate după greutatea lor este o concepție fragmentară de tehnician.

G. Hardy: Nu există matematician atât de pur încît să nu poarte nici un interes lumii fizice.

Ceea ce este mai presus de orice este *tehnica matematicii*, iar această tehnică este predată mai cu seamă prin intermediul matematicii pure.

Gr. C. Moisil: Tot ce e gândire corectă este sau matematică sau susceptibilă de matematizare.

Specificul meseriei mele, matematica, este că se face oriunde, oricum și că trebuie s-o faci oriunde, oricând, oricum.

B. Russell: Evidența este totdeauna inamicul corectitudinii. De aceea noi inventăm calcule simbolice noi și dificile în care nimic nu mai pare evident.

H. Aramă (*Colecționarul de insule*): Unele scheme raționale inventate de utopiști au ceva din farmecul rece al ecuațiilor matematice, a căror eleganță, reală uneori, dacă este să-i credem pe specialiști, formează coșmarul oricărui licean onest.

Gr. C. Moisil: A face matematică nu este nici practica unui viciu ascuns, nici îndreptățită jubilară a vitalității naturale, ci îndeplinirea unei obligații colective în efortul maxim de a îmbunătăți viața.

E. Galois: Știința progresa printr-o serie de combinații în care rolul jucat de întâmplare nu este dintre cele mai puțin importante.

Este penibil ca în știință să te mărginești la rolul de critic.

A sări cu amindouă picioarele peste calcule, a grupa operațiile, a le clasifica după dificultățile lor, iar nu după formele lor, iată, după părerea mea, misiunea viitorilor matematicieni.

H. Cartan: Miracolul științei este că se poate edifica o matematică abstractă care apoi se dovedește capabilă de a se aplica în mod eficace la legile naturii.

C. Noica: O lume a calculului, cum va fi tot mai mult lumea de mâine, stă cu incalculabilul ei în fața cugetelor. Computerul va putea orice; dar este o întrebare dacă va avea și cumpăt.

I.J. Good: Matematicianul, statisticianul și filozoful folosesc în diferite moduri o teorie a probabilităților. Matematicianul creează instrumente simbolice fără a se îngriji prea mult de utilitatea lor; statisticianul folosește aceste instrumente; filozoful vorbește despre ele. Fiecare își face munca mai bine dacă știe câte ceva despre munca celorlalți doi.

W. Weaver: În viață, problemele importante cer de obicei o comparare a șanselor.

Descartes: Este un adevăr foarte bine stabilit că, atunci când nu este în puterea noastră să determinăm ceea ce este adevărat, trebuie să ne luăm după ceea ce este mai probabil.

Autor necunoscut (după W. Weaver): Numerele sînt lucruri sigure.

H.G. Wells: Într-o zi, gândirea statistică va fi la fel de necesară oricărui cetățean folositor societății, ca și scrisul sau cititul.

P.R. Halmos: Amețitor de complicata structură logică a Universului este o provocare pentru matematica pură, dar victoria acesteia este continuă.

J.P. King: Matematica posedă o valoare estetică la fel de pregnantă ca cea a muzicii sau a poeziei.

29. ÎNCHEIERE

Iată-ne ajunși la capătul spectacolului nostru, luminile s-au aprins, scaunele scîrție, spectatorii se grăbesc spre garderobă, actorii se retrag obosiți... Ați rezistat pînă la capăt sau ați ieșit la pauză? Recomandați spectacolul și prietenilor sau... dimpotrivă?

Sper că ați reținut leit-motivul cărții: matematica este un lucru serios, greu, care cere timp și dăruire, dar în același timp ea are atracții nebănuite, la orice nivel ați considera-o.

Conține jocuri, trucuri cu numere și figuri, conține teoreme stranii, altele cu rezonanță gnoseologică tulburătoare, conține nivele „artistice” rivalizând cu cele ale poeziei. Matematica nu este un monstru cenușiu, inaccesibil; este adevărat că se răzbună uneori pe infideli, dar după ce-ți devine prietenă își dezvăluie „frumuseți și prețuri noi”, nebănuite.

Probabil că nici un alt sfârșit nu este mai adecvat pentru această carte decât o teoremă. Iată-o (pentru demonstrație — de altfel, evidentă — și pentru o formă echivalentă a enunțului, vă rog să consultați cartea lui J.H. Conway, *On numbers and games*, Academic Press, New York, Londra, 1976):

TEOREMĂ. *Aceasta este ultima propoziție a secțiunii 29 a cărții.*

30. BIBLIOGRAFIE

În ultimul timp, sînt destul de frecvente bibliografiile comentate. Apar uneori chiar comentarii fără bibliografii; vezi Viorel Gh. Vodă, *Surprize în matematica elementară*, Editura Albatros, București, 1981. Tentația unei explicații mă ispitește și pe mine, mai ales că de data aceasta o asemenea explicație este și necesară. Într-adevăr, lista care urmează este formată în intenția de a furniza cititorului cît mai multe dintre titlurile de „matematică popularizată” apărute la noi în ultimii ani. De fapt, lista conține eseuri, lucrări de istorie a matematicii, volume recreative, în general, lucrări informale, de cultură matematică, așa cum le numește profesorul Solomon Marcus. Nu toate lucrările enumerate sînt însă folosite în text și nu toate lucrările folosite sînt și enumerate (această era explicația pe care o datoram). De altfel, numerotată fiind ca orice altă secțiune, aș vrea ca bibliografia de față să fie chiar considerată o secțiune independentă a cărții, oferind cititorului o anumită informație, nu neapărat selectată sau interpretată în vreun fel.

ANDONIE, G. Șt., *Istoria matematicii în România*. Editura științifică, București, vol. I, 1965; vol. II, 1966; vol. III, 1967.

ANDONIE, G. Șt., *Varia mathematica*, Editura tineretului, Colecția Lyceum (nr. 70), București, 1969.